Liczby zespolone.

Wprowadzenie.

$\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ $\quad x^2=a$ $\quad \mathbb{C}$ - liczby zespolone

$x+a=0 \quad ax+b=0 \quad 0,c,c,\ldots \quad W(x)=0$

Def. Liczbą zespoloną nazywamy wyrażenie postaci

$$a+bi$$

gdzie

$$a,b\in\mathbb{R}, \quad i^2=-1$$

Przykłady

- $2+7i$ • $2-5i = 2+(-5)\cdot i$
- $13 = 13+0\cdot i$, $17i = 0+17i$

Oznaczenie:

- $z = a + bi$

część rzeczywista

jednostka urojona

część urojona

- Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy:

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$$

Działania na $\mathbb{C}$.

- Dzielenie na liczbach zespolonych wykonujemy tak jak na wyrażeniach algebraicznych uwzględniając, że $i^2 = (-1)$

Przykłady

- $(3+7i) + (-5+2i) = 3-5 + (7+2)i = -2+9i$
- $(3-7i) - (3-5i) = 3-3 - 7i + 5i = 0 - 2i = -2i$
- $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Mnożenie:

- $(3-2i)(3+5i) = 3\cdot 3 + 3\cdot 5i - 2i\cdot 3 - 2i\cdot 5i =$
  $9 + 15i - 6i - 10i^2 =$
  $9 + 15i - 6i - 10(-1) =$
  $19 + 9i$

- $(3+2i)(3-2i) = 3\cdot 3 + 3(-2i) + 2i\cdot 3 - 2i(2i) =$
  $9 \cancel{-6i} + \cancel{6i} - 4i^2 =$
  $9 - 4(-1) = 9+4 \in \mathbb{R}$

- $(a+bi)(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + bci + bdi^2 =$
  $(a\cdot c - bd) + (ad + bc)i$

- $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

Liczbę $a-bi$ nazywamy sprzężeniem liczby $a+bi$.

Dzielenie

1° $\frac{3+7i}{-10} = \frac{3}{-10} + \frac{7i}{-10} = -\frac{3}{10} - \frac{7}{10}i$

2° $\frac{3+7i}{2+3i} = \frac{(3+7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i+14i+21}{2^2+3^2} = \frac{27+5i}{13} =$

$\frac{27}{13} + \frac{5}{13}i$

Uwaga. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jest przemienne.

D-d • $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i = (c+a)+(d+b)i =$
$= (c+di)+(a+bi)$

• $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
$(c+di)(a+bi) = (ca-db)+(cb+da)i$ ‖

Uwaga: Elementem neutralnym dodawania jest
$z = 0$
Elementem neutralnym mnożenia jest

$z = 1$

Tw. Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$
wraz z działaniami dodawanie i mnożenie:
$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$
$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
jest ciałem.

Obliczenia w ciele $\mathbb{C}$.

- z^{-1} : $z \neq 0$

$z = a+bi$, $z^{-1} \cdot z = 1$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{\underbrace{a^2+b^2}_{\neq 0}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$$

- Równanie liniowe.

$$(1+i)\,x + (2+3i) = 1-5i \quad \Big|\, -(2+3i)$$

$$(1+i)\,x = 1-5i-(2+3i)$$

$$(1+i)\,x = (-1-8i) \quad \Big|\, : 1+i$$

$$x = \frac{-1-8i}{1+i} = \frac{(-1-8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \ldots$$

- Równanie kwadratowe

$$x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 - 40 = -31$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-31} = \sqrt{31 \cdot (-1)} = \sqrt{31} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{31} \cdot i$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{31}\,i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}\,i$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}\,i$$

Sprzężenie i moduł liczby zespolonej.

Def Niech $z = a+bi \in \mathbb{C}$.

1. Sprzężeniem z nazywamy liczbę zespoloną:

$$\overline{z} = a-bi$$

2. Modułem z nazywamy liczbę rzeczywistą dodatnią

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Przykłady:

$$z = 3+5i$$
$$\overline{z} = 3-5i$$
$$|z| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}.$$

Fakt. Niech $z, s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

1. $\overline{z+s} = \overline{z} + \overline{s}$
2. $\overline{z \cdot s}$ $\quad \overline{z} \cdot \overline{s}$
3. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
4. $\forall r \in \mathbb{R} \quad \overline{r} = r$

5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
6. $|-z| = |\overline{z}| = |z|$

Dowód:

Niech $z = a+bi \quad s = c+di$

1. $\overline{z+s} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$= (a-bi)+(c-di) = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = \overline{z}+\overline{s}$

3. $z\cdot\bar{z} = (a+bi)\overline{(a+bi)} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = \sqrt{a^2+b^2}^{\,2}$
$= |a+bi|^2 = |z|^2$:

Wniosek. Funkcja $\varphi(z) = \bar{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest izomorfizmem ciał.

D-d. 1. $\left.\begin{array}{l}\varphi(z+s) = \overline{z+s} = \bar{z} + \bar{s} = \varphi(z) + \varphi(s) \\ \varphi(z\cdot s) = \overline{z\cdot s} = \bar{z}\cdot\bar{s} = \varphi(z)\cdot\varphi(s)\end{array}\right\}$ homomorfizm

2. φ jest bijekcją $\leftarrow$ ćwiczenie.

Tw. Nie istnieje liniowe uporządkowanie liczb zespolonych $\preccurlyeq$ spełniające:

(1) $\forall a,b,c \in \mathbb{C} \quad a \preccurlyeq b \to a+c \preccurlyeq b+c$
(2). $\forall a,b \in \mathbb{C} \ \forall c \succcurlyeq 0 \quad a \preccurlyeq b \to a\cdot c \preccurlyeq b\cdot c$
(3) $\forall a,b \in \mathbb{C} \ \forall c \preccurlyeq 0 \quad a \preccurlyeq b \to a\cdot c \succcurlyeq b\cdot c$

• Zbiór Z jest liniowo uporządkow. przez $\preccurlyeq$ to $\forall a,b \in Z \quad a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$.

D-d twierdzenia.
Zauważmy, że
1. $\underline{0 \preccurlyeq 1}$ bo gdyby $1 \preccurlyeq 0$
to $1 \preccurlyeq 0 \ |\cdot 1$
na mocy (3) $1\cdot 1 \succcurlyeq 1\cdot 0$
$1 \succcurlyeq 0$ → Sprzeczność

2. $-1 \leq 0$ bo: mamy $0 \leq 1 \quad | + -1$

na mocy (1): $-1 + 0 \leq -1 + 1$

$-1 \leq 0$ $\square$

3. $\neg (i \geq 0)$ bo: gdyby $i \geq 0$

$i \geq 0 \quad | \cdot i$

na mocy (2): $i \cdot i \geq 0 \cdot i$

$-1 \geq 0$ sprzeczne z 2

4 $\neg (0 \geq i)$ bo gdyby $0 \geq i$:

$0 \geq i \quad | \cdot i$

na mocy (3) $0 \cdot i \leq i \cdot i$

$0 \leq -1$ sprzeczne z 2

3 i 4 sprzeczne z liniowością porządku $\leq$.