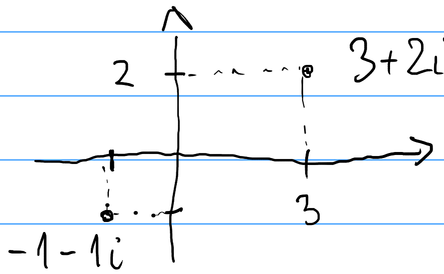
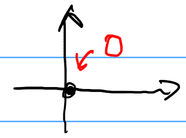
Płaszczyzna zespolona - interpretacja geometryczna ciała $\mathbb{C}$.

Liczbę zespoloną $a+bi \in \mathbb{C}$ interpretujemy jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych (a,b).



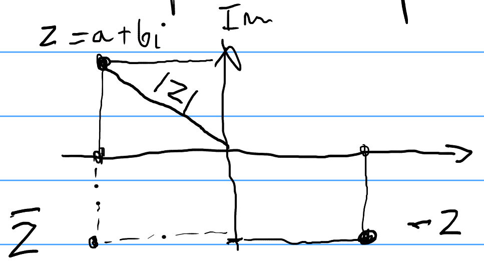
Im - oś urojona

Notacja :



Re - oś rzeczywista

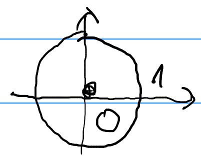
Moduł, sprzężenie i przeciwna.



$$z = a+bi$$
$$-z = -(a+bi) = -a-bi$$
$$\bar{z} = a-bi$$
$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Przykłady :

- $\{z : |z| = 1\} = \{z :$ odległość z od $0 = 1\}$

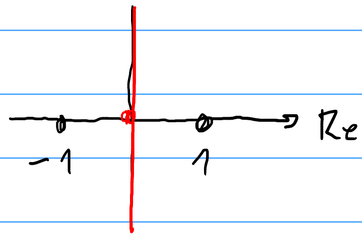


Uwaga 1. Moduł liczby rzeczywistej jest równy jej wartości bezwzględnej.

2. Niech $z, s \in \mathbb{C}$: $|z-s|$ - odległość od z do s.

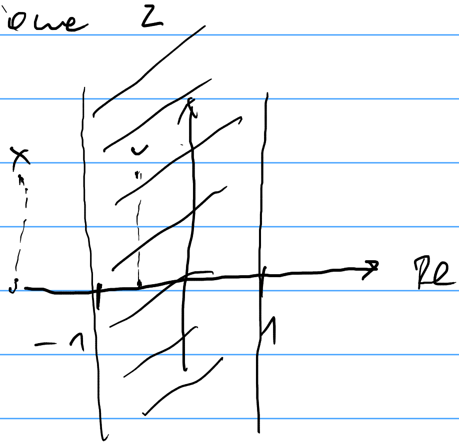
• $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\} =$

$\{z \in \mathbb{C}$: odległość z od 1 jest równa odleg. z od $-1\} = Im$



Oznaczenie Niech $z = a+bi$. Wtedy
$Re(z) = a$ część rzeczywista z
$Im(z) = b$ część urojona z

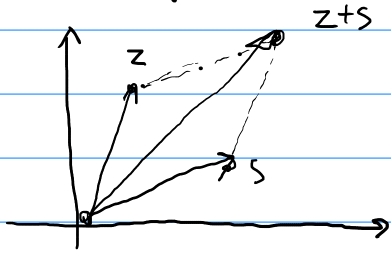
$\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq Re(z) \leq 1\}$



Interpretacja geomet dodawania

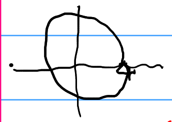
$z = a+bi \xrightarrow{P.2} (a,b)$
$s = c+di \longrightarrow (c,d)$
$z+s \quad (a+c)+(b+d)i \quad (a+c, b+d)$

Liczby zespolone dodajemy tak jak odpowiadające im wektory.



Trygonometria.

- Kąty mierzymy w radianach

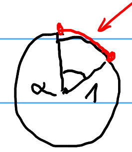


2π radiany

$360° = 2\pi$ rad

$180°$ π rad.

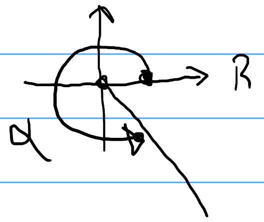
$90°$ $\frac{1}{2}\pi$ rad.



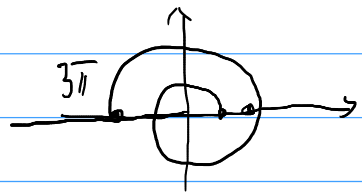
długość łuku = α.

?? α - radiany.

- α:

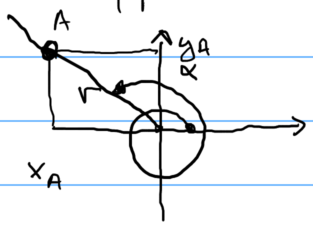


3π:



Funkcje trygonometryczne:

Sinα:



- $\sin\alpha = \frac{y_A}{r}$
- $\cos\alpha = \frac{x_A}{r}$
- $tg\,\alpha = \frac{y_A}{x_A}$

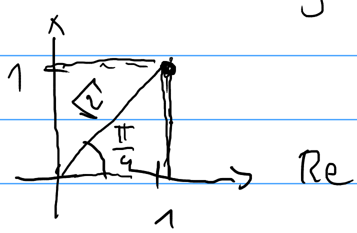
$\sin(\alpha),\ \cos(\alpha) : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej.

Przykład: Rozważmy $z = 1+i$



$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

$1 = \sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{4}$

$z = 1+i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} =$

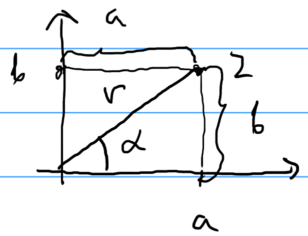
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Fakt. Każdą liczbę zespoloną z możemy przedstawić w postaci trygonometrycznej tzn:

$$(\forall z \in \mathbb{C} \ \exists r \in \mathbb{R}^{\geq 0} \ \exists \alpha \in \mathbb{R})$$

$$z = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

D-d. Rozważmy liczbę $z = a + bi$



Niech r, α tak jak na rysunku

$\cdot \ r = |z|$

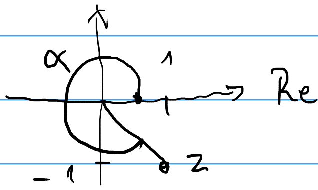
Wtedy $b = r \cdot \sin\alpha$

$a = r \cdot \cos\alpha$

Więc $z = a + bi = r\cos\alpha + r\sin\alpha \, i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\square$

Przykłady: $\cdot$

$z = 1 - i$

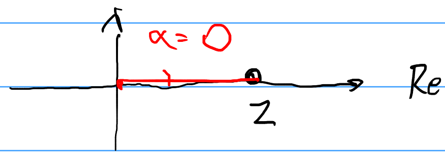


$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi$

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + i \sin\tfrac{7}{4}\pi\right).$$

$\cdot \ z = 3.$



$r = |z| = 3$

$\alpha = 0$

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 3(\cos 0 + i \sin 0)$$

Przypomnienie:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

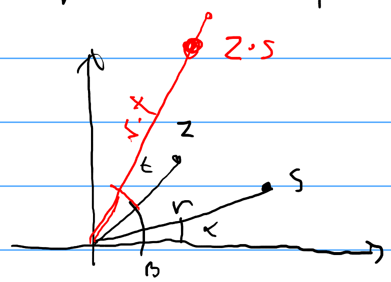
Tw Wzory d'Moivree.

Niech $r, t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)] \cdot [t(\cos\beta + i\sin\beta)]$
$= r \cdot t(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$

2. $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Uwaga. Interpretacja geometryczna mnożenia



Dowód tw. d'Moivre'a.

1: $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)][t(\cos\beta + i\sin\beta)] =$

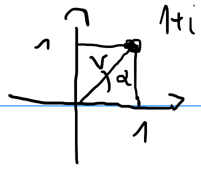
$r \cdot t(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$
$r \cdot t(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta) =$
$r \cdot t((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta))$
$r \cdot t(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$ $\square$

2: ćw. $\square$

Potęga naturalna liczby zespolonej

Przykład: $(1+i)^{100}$

I przedstawiamy $1+i$ w postaci trygonometr:



$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad r = \sqrt{2}$$

$$1+i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

II. Potęgowanie:

$$(1+i)^{100} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100} \overset{dM}{=}$$

$$\sqrt{2}^{100}\left(\cos\left(100\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(100\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2^{50}\left(\cos 25\pi + i\sin 25\pi\right) \overset{red}{=}$$

$$2^{50}\left(\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{\cos\pi}} + i\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin\pi}}\right) = \left(-2^{50}\right)$$