Fakt. Postać trygonometryczna.

$\forall z\in\mathbb{C}\ \exists \alpha\in[0,2\pi)\quad z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Uwaga. $\forall k\in\mathbb{Z}\quad |z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=|z|(\cos(\alpha+2k\pi)+i\sin(\alpha+2k\pi))$

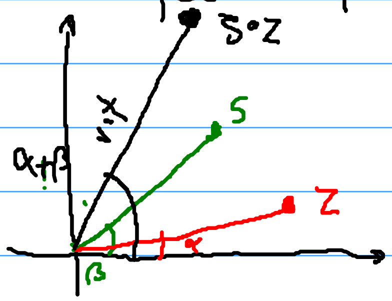
Def. Niech $z\in\mathbb{C}$.

1. Kąt $\alpha\in[0,2\pi)$ taki, że $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. nazywamy argumentem głównym i oznaczamy
$\mathrm{Arg}(z)=\alpha$.
2. Argumentem nazywamy każdy kąt α taki, że
$z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
oznaczamy $\arg(z)$.

Wzory d'Moivre:

- $[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]\cdot[t(\cos\beta+i\sin\beta)]=$
$r\cdot t(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$.
- $[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

Uwaga. Mnożenie liczb zesp. możemy wykonać geometrycznie.



- Fakt
  - $\forall z,s\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Arg}(z\cdot s)=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(s)$
  - $n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{Arg}(z^n)=n\cdot\mathrm{Arg}(z)$.

• Zwróćmy uwagę na podobieństwo do $\ln(x)$:

$\sqrt[n]{z} = x$??

Równanie $x^n = z$.

Przykład $x^6 = 1$

I Przedstawienie 1 i x w postaci trygonometr.:

$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Trygonometria: Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, takie że

$\sin\alpha = \sin\beta \wedge \cos\alpha = \cos\beta \iff \alpha - \beta = 2k\pi$

II Rozw. równania $\cancel{x^6 = 1}$

$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^6 = 1(\cos 0 \quad i\sin 0)$.

d'M: $r^6(\cos 6\alpha + i\sin 6\alpha) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\begin{cases} r^6 = 1 \\ \cos 6\alpha = \cos 0 \\ \sin 6\alpha = \sin 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ 6\alpha - 0 = 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$k=0 \quad x_0 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$

$k=1 \quad x_1 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}\right).$

$k=2 \quad x_2 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{6}\cdot 2 + i \sin \frac{2\pi}{6}\cdot 2\right)$

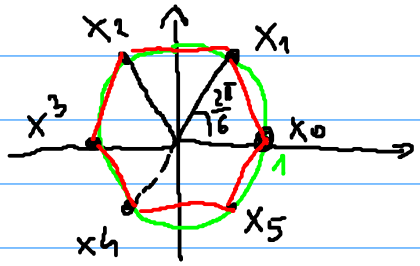
$\vdots$

$k=5 \quad x_5 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{6}\cdot 5 + i \sin \frac{2\pi}{6}\cdot 5\right)$

$k=6 \quad x_6 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{6}\cdot 6 + \dots\right) = 1(\cos 2\pi + \dots) = x_0$

Rozwiązanie na płaszczyźnie:

$\mathbb{C}$:



!! Rozwiązania są wierzchołkami 6 $\measuredangle$ foremnego !!

Fakt. Niech $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$.
Wtedy rozwiązania równania $x^n = z$ są postaci:

$$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

D-d. Oznaczmy $x = t(\cos\beta + i\sin\beta)$ $\quad t, \beta = ?$

$$x^n = z$$

$$[t(\cos\beta + i\sin\beta)]^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dM:

$$t^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Więc:

$$\begin{cases} t^n = r \\ \cos n\beta = \cos\alpha \\ \sin n\beta = \sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} t = \sqrt[n]{r} \\ n\beta - \alpha = 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} t = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

zatem

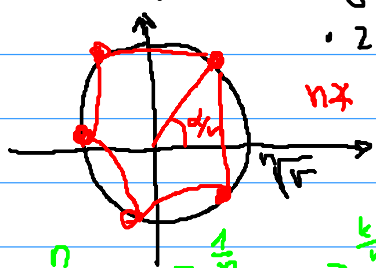
$$x = t(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Wystarczy: $k = 0, \ldots, n-1$ $\square$

$x^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$:

Wniosek. Rozwiązania są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$, argument jednego z nich jest równy $\frac{\alpha}{n}$

- $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$



n-kąt foremny

Potęgowanie z^n, $z^{\frac{1}{n}}$, $z^{\frac{k}{n}}$, z^q $q \in \mathbb{Q}$, z^r $r \in \mathbb{R}$,

$i^i = ?$ $2^i = ?$

WZÓR EULERA.

- Liczba $e = 2{,}718\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Funkcja e^x. $x \in \mathbb{R}$.

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Doświadczenie:

$x \in \mathbb{R}$.

$$e^{xi} = 1 + \frac{(xi)^1}{1!} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \frac{(xi)^5}{5!} + \dots =$$

$$1 + \frac{x}{1!} i - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} i - \frac{x^6}{6!} + \dots =$$

$$\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right] + \left[\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right] i$$

Zauważmy: $= \cos x + \sin x \cdot i$

WZÓR EULERA:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Przykład

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0$$

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Ponadto. $e^{y+xi} = e^y \cdot e^{xi} = e^y(\cos x + i \sin x).$

POSTAĆ WYKŁADNICZA LICZBY ZESPOLONEJ.

Fakt. Każdą liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ możemy zapisać w postaci:

$$z = r \cdot e^{\alpha i}, \quad r \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Postać tę nazywamy postacią wykładniczą.

D-d. Dla każdej liczby zesp. z istnieją $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

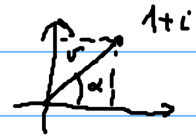
$$z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Więc $z = r \cdot e^{\alpha i}$ □

Przykłady:

- $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1\cdot e^{0i}$

- $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$



$r = \sqrt{2}$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$

Uwaga. Przedstawienie w post. wykładniczej nie jest jednoznaczne!

$$z = re^{\alpha i} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\left(\cos(\alpha+2k\pi) + i\sin(\alpha+2k\pi)\right) = r\cdot e^{(\alpha+2k\pi)i} \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Uwaga: $\left(e^{\alpha i}\right)^{\beta} = e^{\alpha\cdot\beta i}$

wł:

- $(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20}\cdot e^{5\pi i} = 2^{10} e^{\pi i} = 2^{10}\cdot(-1) = -2^{10}$