- $\alpha \in \mathbb{R} \quad e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha$
- $\forall z \ \exists \alpha, r \quad z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r \cdot e^{\alpha i}$

Podsumowanie $+, -, \cdot, :, z^r, e^z, z^s$ (np. i^i).

Niech $z, s \in \mathbb{C}$. $\quad z = r \cdot e^{(\alpha+2k\pi)i} = e^{\ln(r)} \cdot e^{(\alpha+2k\pi)i} = e^{\ln(r)+(\alpha+2k\pi)i}$

$s = a+bi$

$$z^s = \left(e^{\ln r + (\alpha+2k\pi)i}\right)^{(a+bi)} = e^{(\ln r + (\alpha+2k\pi)i)(a+bi)}$$

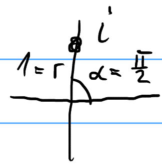
Niech $(\ln r + (\alpha+2k\pi)i)(a+bi) = A+Bi$

$$z^s = e^{A+Bi} = e^A \cdot e^{Bi} = e^A(\cos B + i\sin B)$$

$k \in \mathbb{Z}$

Przykład i^i:

$$i = 1\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$$



$$i^i = \left[e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}\right]^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = \frac{1}{e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}}$$

$$\overset{k=0}{=} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} \in \mathbb{R}.$$

Obserwacja.

$$e^{-\alpha i} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$e^{\alpha i} = \dots = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$+$

$$e^{-\alpha i} + e^{\alpha i} = 2\cos\alpha \quad | :2$$

- $\cos\alpha = \dfrac{e^{-\alpha i} + e^{\alpha i}}{2}$
- $\sin\alpha = \dfrac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$

KWATERNIONY $\mathbb{H}$

$1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \equiv$ obrót o α

obroty $\mathbb{R}^2$ → $\mathbb{C}$ obrotów $\mathbb{R}^4$ → $\mathbb{H}$

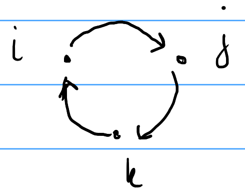
$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$ – kwaterniony.

Def Kwaternionem nazywamy wyrażenie postaci:

$$a+bi+cj+dk \quad \text{gdzie} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

oraz $i\,j\,k$ spełniają: $*$

$$i^2 = j^2 = k^2 = (-1)$$



$i \cdot j = k$

$j \cdot k = i$

$k\,i = j$

$i \cdot k = -j$

Obs: nie jest przemienne

$a \cdot b$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	-k	j
j	j	k	-1	-i
k	k	-j	i	-1

Działania na zbiorze $\mathbb{H}$: (tak jak na wyrażeniach algebraicznych uwzględniając $(*)$)

$+$: $(a+bi+cj+dk) + (a'+b'i+c'j+d'k) =$
$(a+a') + (b+b')i + (c+c')j + (d+d')k.$

$\cdot$: $(i+2j)(3j-k) = 3ij - ik + 6j^2 - 2jk \overset{*}{=}$
$3k + j - 6 - 2i$
$= -6 - 2i + j + 3k.$

Sprzężenie kwaternionu

$\overline{a+bi+cj+dk} = a - bi - cj - dk.$

Moduł kwaternionu

$|a+bi+cj+dk| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Fakt. Niech $z, s \in \mathbb{H}$

1. $\overline{z+s} = \overline{z} + \overline{s}$
2. $\overline{z \cdot s} = \overline{z} \circ \overline{s}$
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$.

D-d $z = a + bi + cj + dk$ $s = a' + b'i + c'j + d'k$
sprawdzić: $L = P \longleftarrow$ ćwiczenie.

Dzielenie:

$$\frac{j}{j+k} = \frac{j(-j-k)}{(j+k)(-j-k)} \overset{(3)}{=} \frac{-j^2 - jk}{1^2 + 1^2} = \frac{1-i}{2}.$$

Własności kwaternionów.

1. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ jest pierścieniem ale nie jest ciałem.
2. $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą nieprzemienną $i \cdot j \neq j \cdot i$
3. $\mathbb{R}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}[j] \cong \mathbb{R}[k]$.
4. $\mathbb{H}$ nie ma dzielników zera.

Większe zbiory liczbowe: • nie jest łączne

$$\mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{C} \xrightarrow{*} \mathbb{H} \rightarrow \text{Oktawy Cayleya} \rightarrow \text{Sedeniony}.$$

$\longrightarrow$ konstrukcja Cayleya - Dicksona

$$(Z, +, \cdot, \overline{}, |\cdot|) \xrightarrow{CD} (Z', +', \cdot', \overline{}', |\cdot|')$$

• $Z' = Z \times Z$