WIELOMIANY.

Def. Niech R - pierścień. Wielomianem nad R nazywamy wyrażenie postaci

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad , \quad a_i \in R.$$

Oznaczenia:

Tylko skończenie wiele $a_k \neq 0$

$$a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$$

Zbiór wszystkich wielomianów nad R zmiennej x

$$R[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : \left| \{ k : a_k \neq 0 \} \right| < \infty \right\}$$

$|A|$ - moc zbioru A

Działania na wielomianach:

$$\left[\sum_{k \in \mathbb{N}}^{n} a_k x^k \right] + \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k x^k \right] = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k + b_k) x^k$$

$$\left[\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \right] \cdot \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k x^k \right] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right] x^k$$

Fakt. Niech R pierścień.

1. $(R[x], +, \cdot)$ jest pierścieniem.
2. Jeśli R jest przemienny z 1 i bez dzielników zera to $(R[x], +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z 1 bez dzielników zera.

Uwaga (2). obejmuje przypadki R jest ciałem, $R = \mathbb{Z}$.

Def. Niech $f = \sum a_k x^k \in R[x]$. Stopień wiel. f nazywamy liczbą

- $st(f) = \max\{k : a_k \neq 0\}$, $f \neq 0$
- $st(0) = 0$

Przykład $st(0x^3 + 5x^2 + 3x + 1) = 2$, $st(3) = 0 = st(0)$.

Fakt Niech R pierścień przemienny z 1 bez dzielników 0. Wtedy $\forall f, g \in R[x]$.

1. $st(f+g) \leq \max\{st f, st g\}$.
2. $st(f \cdot g) = st(f) + st(g)$

D-d. ćwiczenie.

Fakt Dzielenie z resztą.
Niech K CIAŁO. Wtedy
$(\forall f, g \in K[x] \; \exists w, r \in K[x].)$ $f = g \cdot w + r \wedge st(r) < st(g)$.

D-d. I jeśli $st g > st f$, to $f = \overset{w}{0} \cdot g + f$
weź $r = f$.

II $st g \leq st f$.
Indukcja względem $st f$.

Założenie ind:

$\forall f, g \in K[x] \; \exists w, r \in K[x] \; f = gw + r \wedge st r < st g$
$st f \leq n$

$n \to n+1$. Niech $f, g \in K[x]$. $st(f) = n+1$

oznaczmy: $f = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ $\quad$ st $f = n+1$, st $g = k$.

Niech $f_0 = f - \frac{a_{n+1}}{b_k} x^{n-k+1} \cdot g =$

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i - \frac{a_{n+1}}{b_k} x^{n-k+1} \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$$

Zauważmy, że st $f_0 \leq n$, więc spełnia założenie indukcyjne. Więc istnieją wielomiany w_0, r takie że:

$$(*) \quad f_0 = g \cdot w_0 + r \quad \text{i} \quad \underline{\text{st } r < \text{st } g}$$

$$f = f_0 + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{b_k}} x^{n-k+1} \cdot g \overset{(*)}{=}$$

$$g \cdot w_0 + r + \frac{a_{n+1}}{b_k} x^{n-k+1} \cdot g =$$

$$\Big[\underbrace{w_0 + \frac{a_{n+1}}{b_k} \cdot x^{n-k+1}}_{w}\Big] g + r$$

Więc.

$$f = w \cdot g + r \quad \wedge \quad \text{st } r < \text{st } g$$

Na mocy indukcji teza prawdziwa dla dowol f. $\square$

Przykład. (dzielenie wielomianów z resztą):

$$\begin{array}{l}
\quad \frac{1}{2}x^3 + x \\
\hline
x^5 + x^3 + x + 1 \quad : \boxed{2x^2} - 2 \\
-\ \underline{x^5 - x^3} \\
= \quad 2x^3 + x + 1 \\
-\ \underline{2x^3 - 2x} \\
= \quad 3x + 1
\end{array}$$

reszta z dzielenia

$$\overset{f}{x^5 + x^3 + x + 1} = \overset{g}{(2x^2 - 2)}\overset{w}{\left(\frac{1}{2}x^3 + x\right)} + \overset{r}{3x + 1}$$

Wniosek: Tw. Bezout.

Niech K - ciało $f \in K[x]$, $x_0 \in K$. Wtedy

$$(x-x_0) \mid f \iff f(x_0) = 0.$$

$[\, f \mid g \iff \exists w \quad g = fw \,]$

D-d. $\Rightarrow$:

Niech $(x-x_0) \mid f$, więc istnieje $w \in K[x]$ taki że

$$f(x) = w(x) \cdot (x-x_0)$$

Wtedy

$$f(x_0) = w(x_0) \cdot (x_0 - x_0) = w(x_0) \cdot 0 = 0.$$

$\Leftarrow$: Załóżmy $f(x_0) = 0$

$f, (x-x_0) \in K[x]$ więc z tw. o dzieleniu z resztą istnieją $w, r \in K[x]$ takie że

$$f(x) = (x-x_0) \cdot w(x) + r(x) \quad \wedge \quad st(r) < st(x-x_0)$$

Zauważmy

$$st(r) < st(x-x_0) = 1$$
$$st(r) = 0.$$

więc $r \in K$.

$$f(x) = (x-x_0) \cdot w(x) + r$$

Wiemy że $f(x_0) = 0$ więc

$$0 = f(x_0) = \underbrace{(x_0 - x_0)\, w(x_0)}_{=0} + r$$

$$r = 0,$$

$f(x) = (x-x_0) \cdot w(x)$. tzn $(x-x_0) \mid f$. $\square$

WIELOMIANY NIEROZKŁADALNE.

Def. Niech R pierścień przemienny z 1 bez dziel. zera.

Wielomian $f \in R[x]$, $\operatorname{st} f > 0$ nazyw. nierozkładalnym, gdy dla dowolnych $g, h \in R[x]$

$$f = g \cdot h \to (\operatorname{st} g = 0 \vee \operatorname{st} h = 0).$$

Przykład x^2+1 jest nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$.

Fakt. Wielomiany $\operatorname{st} = 1$ są nierozkładalne.

D-d Niech $\operatorname{st} f = 1$ $f \in R[x]$.

Niech $g, h \in R[x]$ takie że:

$$f = g \cdot h \quad | \operatorname{st}.$$

$$1 = \operatorname{st}(f) = \operatorname{st}(g \cdot h) = \operatorname{st}(g) + \operatorname{st}(h).$$

$$\operatorname{st}(g), \operatorname{st}(h) \in \mathbb{N}.$$

Więc

$$\operatorname{st}(g) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{st}(h) = 0 \qquad \square$$

Fakt(*) R-ciało, $\mathbb{Z}$

Niech R pierścień przemienny z 1 z jednoznacznością rozkładu. Niech $f \in R[x]$ wielomian nierozkładalny. Wtedy

$\operatorname{st} f > 0$

$$(\forall g, h \in R[x])\ f \mid g \cdot h \to (f \mid g \vee f \mid h).$$

\# Wniosek. Niech $f_1, \dots f_n \in R[x]$ nierozkładalne takie że $(\forall\ i \neq j)\ f_i \nmid f_j$, $\operatorname{st} f_i > 0$. Wtedy $\forall g \in R[x]$ zachodzi:

$$(f_1 \mid g \wedge f_2 \mid g \dots \wedge f_n \mid g) \to f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \mid g$$

D-d. Szkic. Dla $n = 2$:

Niech f_1, f_2 nierozkł. takie że $f_1 | g$ oraz $f_2 | g$

Skoro $f_1 | g$ to $(\exists w)\ g = w \cdot f_1$.

$f_2 | g$ więc $f_2 | w \cdot f_1$

Na mocy Faktu * $f_2 | f_1$ lub $f_2 | w$

nie możliwe

Skoro $f_2 | w$ to $\exists v \in R[x]$ $w = f_2 \cdot v$

Wtedy $g = w \cdot f_1 = f_2 \cdot v \cdot f_1 = (f_1 \cdot f_2) \cdot v$

Więc: $f_1 \cdot f_2 | g$. $\square$

Fakt. Niech K - ciało. Wielomian $f \in K[x]$ ma nie więcej niż $st(f)$ parami różnych pierwiastków.

D-d. Załóżmy nie wprost, że istnieją:
K ciało, $f \in K[x]$, $x_1, x_2 \dots x_m \in K$ takie, że
$(\forall i \neq j)\ f(x_i) = 0 \wedge x_i \neq x_j$ oraz $m > st f$.

Wtedy: Z twierdzenia Bezout, dla $i = 1, \dots, m$:

- $f(x_i) = 0 \xrightarrow{TwB} (x - x_i) | f$.
- $(x - x_i)$ jest nierozkładalny bo $st(x - x_i) = 1$.
- $i \neq j$ $(x - x_i) \nmid (x - x_j)$

Więc z Wniosku #: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_m) | f$.

tzn: $\exists w \in K[x]$

$$f = (x - x_1) \cdots (x - x_m) \cdot w$$

Wtedy $m > \operatorname{st} f = \operatorname{st}(x-x_1)\cdots(x-x_m) + \operatorname{st} w = m + \operatorname{st} w \geqslant m$

Więc $m > m$ sprzeczność. $\square$