Wielomiany nad $\mathbb{C}$. Ciała algebraicznie domknięte

Def. Ciało K nazywamy algebraicznie domkniętym gdy

$$\forall f(x) \in K[x] \quad st(f) > 0 \rightarrow \exists a \in K \quad f(a) = 0.$$

Uwagi.

1. Ciało $\mathbb{R}$ NIE jest algebraicznie domknięte

bo $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$

2. Ciała skończone nie są algebraicznie domknięte

D-d Niech $K = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ ciało skończone

Wielomian $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdot(x-x_n)+1$
nie ma pierwiastków należących do K.

TW Zasadnicze twierdzenie algebry

Ciało $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte.

TW. Każde ciało jest podciałem ciała algebraicznie domkniętego.

Fakt Ciało K jest alg. domk. $\Leftrightarrow$
$(\forall f \in K[x] \quad \exists A, x_1, x_2, \dots, x_n \in K) \quad f(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

D-d $\Leftarrow$: ćw.

$\Rightarrow$: Niech K ciało alg. domk.

Indukcja wzg $st(f)$

1° $st\, f = 0$ to $f \in K$ $f = f$ jest szukanym rozkład..

2° $n \to n+1$

Z: Każdy wielomian st. n jest postaci

$$f(x) = A(x-x_1)\dots(x-x_n). \qquad A, x_1 \dots x_n \in K.$$

Niech $f(x)$ wiel. stopnia $n+1$.

Z zas. tw. algebry istnieje $x_{n+1} \in K$ taki że

$f(x_{n+1}) = 0$, więc z Tw. Bezout $(x - x_{n+1}) \mid f(x)$

Więc $f(x) = (x - x_{n+1}) \cdot g(x)$ gdzie $st(g(x)) = n$.

Z założenia ind: $g(x) = A(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Więc $f(x) = g(x)\cdot(x - x_{n+1}) = A(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{n+1})$

Z zasady indukcji teza jest prawdziwa dla każdego $st(f)$. $\square$

WIELOMIANY O WSPÓŁCZYNNIKACH $\mathbb{R}$.

UWAGA. $\forall z \in \mathbb{C}$ $(x-z)(x-\bar{z}) \in \mathbb{R}[x]$

D-d Niech $z \in \mathbb{C}$ $\quad (x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - (z+\bar{z})x + z\cdot\bar{z} =$

$$= x^2 - \underline{2re(z)}x + \underline{|z|^2} \in \mathbb{R}[x]. \quad \square$$

Przypomnienie. Niech $z, s \in \mathbb{C}$. Wtedy

1. $\overline{z+s} = \bar{z} + \bar{s}$
2. $\overline{z\cdot s} = \bar{z}\cdot\bar{s}$
3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad n \in \mathbb{N}$
4. $r \in \mathbb{R} \quad \bar{r} = r$

Fakt. Niech $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Wtedy

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = 0 \rightarrow f(\bar{z}) = 0$$

D-d Niech $f(x) = r_0 + r_1 x^1 + \dots + r_n x^n \in \mathbb{R}[x]$.

$$f(z) = 0$$

$$r_0 + r_1 z^1 + r_2 z^2 + \dots + r_n z^n = 0 \quad \Big|\ \bar{\cdot}$$

$$\overline{r_0 + r_1 z^1 + r_2 z^2 + \dots + r_n z^n} = \bar{0}$$

P1: $\overline{r_0} + \overline{r_1 z^1} + \overline{r_2 z^2} + \dots + \overline{r_n z^n} = 0$

P2: $\overline{r_0} + \overline{r_1}\,\overline{z^1} + \overline{r_2}\cdot\overline{z^2} + \dots + \overline{r_n}\,\overline{z^n} = 0$

P3: $\overline{r_0} + \overline{r_1}\,\bar{z}^1 + \overline{r_2}\,\bar{z}^2 + \dots\ \overline{r_n}\,\bar{z}^n = 0$

P4 $r_0 + r_1 \bar{z}^1 + r_2 \bar{z}^2 + \dots\ r_n \bar{z}^n = 0$

$$f(\bar{z}) = 0. \qquad \square$$

Tw. Niech $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, st $f > 0$. Wtedy istnieją $g_1(x), g_2(x) \dots g_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ wielomiany st. 1

$h_1(x), h_2(x) \dots h_l(x) \in \mathbb{R}[x]$ wiel. st. 2 takie, że

$$f = g_1 \cdot g_2 \cdots g_k \cdot h_1 \cdot h_2 \cdots h_l$$

D-d. Niech $f \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$

Skoro $\mathbb{C}$ jest alg. domk. to istnieją $A, x_1 \dots x_n \in \mathbb{C}$. takie że

$$f(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Zauważmy: $A \in \mathbb{R}$.

Niech $x_1, x_2 \dots x_k \in \mathbb{R}$, $x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Zauważmy: $\forall i \geq k+1 \ \exists j \geq k+1 \quad \overline{x_i} = x_j \ \wedge \ i \neq j$.

bzo. $\overline{x_{k+1}} = x_{k+2}$, $\overline{x_{k+3}} = x_{k+4}$

Więc, $f(x) = A(x-x_1)\dots(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

$$= A \underbrace{\overset{g_1}{(x-x_1)} \dots \overset{g_k}{(x-x_k)}}_{\in \mathbb{R}[x],\ st\ 1} \underbrace{\overset{h_1}{[(x-x_{k+1})(x-\overline{x_{k+1}})]}}_{\in \mathbb{R}[x],\ st = 2} \dots \overset{h_l}{[(x-x_{n-1})(x-x_n)]}$$

$$= g_1 \cdot g_2 \cdots g_k \cdot h_1 \cdot h_2 \cdots h_l. \qquad \square$$

Rozkładalność wielomianów.

R - pierścień przemienny z 1 bez dzielników zera i z jednoznacznością rozkładu oznaczamy UFD

Przykład: $\mathbb{Z}$ jest UFD, Każde ciało jest UFD.

Tw Gaussa. Jeśli R jest UFD to $R[x]$ jest UFD.

K - ciało

K, $K[x]$, $K[x][y] = K[x,y]$, $K[x,y,z]$, ... są UFD.

Kryt Eisensteina. Niech $f = a_0 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$

$p \in \mathbb{P}$ taka że, $p | a_0$ $p | a_1 \dots$ $p | a_{n-1}$

oraz $p \nmid a_n$ $p^2 \nmid a_0$

Wtedy f jest nierozkład. w $\mathbb{Z}[x]$

Wniosek: $p \in \mathbb{P}$ to wiel.

$x^n + p$ jest nierozkładalny.

$$x^n + p = \underset{\substack{\| \\ a_0}}{p} + \underset{\substack{\| \\ a_1}}{0} x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^{n-1} + 1x^p$$

$p | a_0$ $p | a_1 \dots$ $p | a_{n-1}$ $p \nmid a_n$ $p^2 \nmid p = a_0$

KE $\longrightarrow$ nierozkład. nad $\mathbb{Z}[x]$

Lemat Gaussa. Niech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

$f(x)$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$

$\Leftrightarrow$

$f(x)$ jest rozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$

Wniosek. Wiel $x^4 - p$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$. $p \in \mathbb{P}$