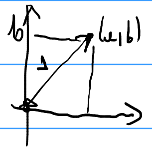
PRZESTRZENIE $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Def Przestrzenią wektorową $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym nazywamy strukturę $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \circ)$, gdzie

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$v = (a,b)$

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$



$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : k \cdot (a,b) = (ak, bk)$

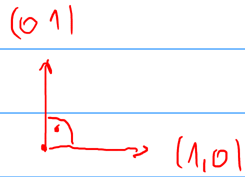
$\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ iloczyn skalarny zdefiniowany:

$|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$

$v, w \in \mathbb{R}^2 : \quad v \circ w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle\{v,w\}$.

Przykłady: $\circ (1,0) \circ (1,0) = |(1,0)| \cdot |(1,0)| \cdot \cos \sphericalangle\{(1,0),(1,0)\} =$
$1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$k > 0$ $\quad v = k \cdot w$. ten $\sphericalangle\{v,w\} = 0 \to v \circ w = |v||w| \cdot \cos 0 = |v| \cdot |w|$.



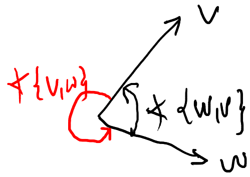
$\circ (1,0) \circ (0,1) = |(1,0)| \cdot |(0,1)| \cdot \cos \sphericalangle\{(1,0),(0,1)\} =$
$1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$\circ$ Obserwacja $v \perp w \to v \circ w = 0$

Fakt Własności iloczynu skalarnego.
Niech $v, w, u \in \mathbb{R}^{2(3)}$, $k, \ell \in \mathbb{R}$. Wtedy

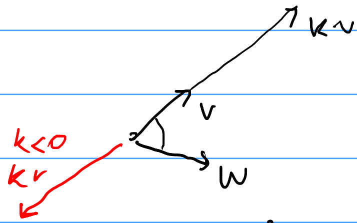
1. $v \circ w = w \circ v$
2. $(k \cdot v) \circ w = k \cdot (v \circ w)$ $\quad (kv) \circ (\ell w) = k\ell (v \circ w)$
3. $(v+u) \circ w = v \circ w + u \circ w$!!!
4. $v \circ v = 0 \iff v = (0,0)$.

D-d.



(1) : $v \circ w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle\{v,w\}$ ||
$w \circ v = |w| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle\{w,v\}$

$\sphericalangle\{v,w\} + \sphericalangle\{w,v\} = 2\pi$
$\cos\sphericalangle\{v,w\} = \cos(2\pi - \sphericalangle wv) =$
$\cos(-\sphericalangle wv) = \cos \sphericalangle wv$



(2) I $k > 0$ wtedy

$$(k \cdot v) \circ w = |k \cdot v| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle\{kv, w\} = k \cdot |v| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle\{v,w\} =$$
$$= k(v \circ w)$$

II $k < 0$

$$(kv) \circ w = |k \cdot v| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle\{kv,w\} = -k|v| \cdot |w| - \cos\sphericalangle\{v,w\} =$$
$$= k(v \circ w).$$

3, 4 ćw $\square$

<u>Wniosek</u> 1. $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ to $(a,b)\circ(x,y) = ax + by$
3. $(a,b,c),(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ to $(a,b,c)\circ(x,y,z) = ax + by + cz$

D-d 1.
Zauważmy $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$.

$$(a,b)\circ(x,y) = [a(1,0) + b(0,1)] \circ [x(1,0) + y(0,1)] =$$

$$[a(1,0)]\circ[x(1,0)] + [a(1,0)]\circ[y(0,1)] + [b(0,1)]\circ[x(1,0)] + [b(0,1)]\circ[y(0,1)]$$

$$= ax[(1,0)\circ(1,0)] + ay[(1,0)\circ(0,1)] + bx[(0,1)\circ(1,0)] + by[(0,1)\circ(0,1)]$$
$$= ax \cdot 1 \quad ay \cdot 0 \quad + bx \cdot 0 \quad + by \cdot 1$$
$$= ax + by$$ $\square$

Przykład: $(1,2,3)\circ(1,1,-1) = 1\cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3\cdot(-1) = 0$
więc są prostopadłe.

GEOMETRIA w $(\mathbb{R}^{2,3}, +, \cdot, \circ)$.

Pojęcia: długości wektora, odległość między punktami, prostopadłość, kąt między wektorami.

1. Długości wektora

$$|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a,b)\circ(a,b)}$$

$$|v| = \sqrt{v\circ v}$$

2. Odległość między punktami w $\mathbb{R}^{2,3}$

$A=(a,b)$, $B=(x,y) \in \mathbb{R}^2$

odległość $|AB| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} =$

$|A-B| = |(a,b)-(x,y)| = |(a-x, b-y)| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$

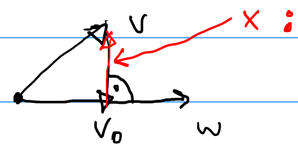
$|A,B| = |A-B| = ((A-B)\circ(A-B))^{1/2}$

3. Prostopadłość: $v, w \neq 0$ $\quad v \perp w \Leftrightarrow v\circ w = 0$

4. Kąt. $\quad v\circ w = |v|\cdot|w| \cdot \cos\sphericalangle\{v,w\}$

$$\cos\sphericalangle\{v,w\} = \frac{v\circ w}{|v|\cdot|w|}.$$

5. Rzut prostopadły wekt. v na w.



x: $\quad x + v_0 = v$

$x = v - v_0$

$x \perp w$

$$\begin{cases} v_0 \parallel w \\ (v-v_0)\perp w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k)\ v_0 = k\cdot w \\ (v-v_0)\circ w = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = kw \\ v\circ w - v_0\circ w = 0 \end{cases} \text{ więc, } \begin{cases} v_0 = k\cdot w \\ v\circ w = v_0\circ w \end{cases}, \begin{cases} v_0 = kw \\ v\circ w = (kw)\circ w \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = kw \\ v\circ w = k\cdot(w\circ w) \end{cases} \text{ wtedy } k = \frac{v\circ w}{w\circ w}, \quad v_0 = k\cdot w = \left(\frac{v\circ w}{w\circ w}\right)\cdot w.$$

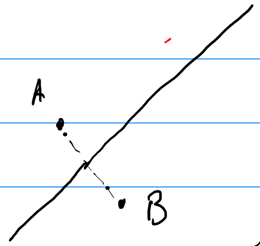
Fakt. Rzut prostopadły wekt. v na w jest równy:

$$v_w = \left(\frac{v \circ w}{w \circ w}\right) \cdot w.$$

Przykład: Oblicz rzut $(1,2,3)$ na $(4,5,6)$. ćwiczenie.

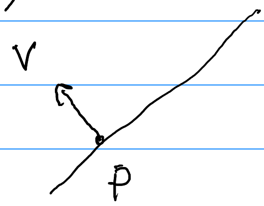
ZASTOSOWANIE

• Równanie prostej na płaszczyźnie.



Euklides: Def. Niech $A \neq B \in \mathbb{R}^2$. Wtedy zbiór: $\{X : |AX| = |BX|\}$ jest prostą

równoważnie:



Def II Niech P punkt, v wektor w $\mathbb{R}^2$

$\{X : \overrightarrow{PX} \perp v\}$ jest prostą.

• Równoważne weź:

$$P = \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$v = A - P$$

Dane $P = (a,b)$, $v = (p,q)$

Szukamy $X = (x,y)$ takich że:

$\overrightarrow{PX} \perp v$ tzn. $\overrightarrow{PX} \circ v = 0$ tzn $(P - X) \circ v = 0$

$X \circ v - P \circ v = 0$, podst. $(x,y) \circ (p,q) - (a,b) \circ (p,q) = 0$

$$px + qy - \underbrace{(ap + bq)}_{r \in \mathbb{R}} = 0$$

$px + qy + r = 0$; ogólne równanie prostej w $\mathbb{R}^2$.

PŁASZCZYZNA W $\mathbb{R}^3$.

Def. Niech $P=(a,b,c)$, $v=(p,q,r)$ punkt i wektor w $\mathbb{R}^3$

Wtedy zbiór $\{X \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{PX} \perp v\}$ jest płaszczyzną.

$$\overrightarrow{PX} \perp v \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} \circ v = 0 \Leftrightarrow (P-X) \circ v = 0$$

$X \circ v - \underbrace{P \circ v}_{t} = 0$. Podstawiając $X=(x,y,z)$, $v=(p,q,r)$, $P=\ldots$:

$(x,y,z) \circ (p,q,r) + t = 0$

$px + qy + rz + t = 0$ i ogólne równanie płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$

Np: $(7x + 8y - 9z + 3 = 0) \perp (7,8,-9)$.

Obserwacja.

Wektor (p,q,r) jest prostopadły do płaszczyzny o równaniu:

$$px + qy + rz + t = 0.$$