MACIERZE.

Def. Niech A zbiór. Macierzą nad A nazywamy prostokątną tabelkę wypełnioną elementami A.

Przykład: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, macierz nad $\mathbb{N}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, • $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ macierz nad alfabetem.
- $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

Oznaczenie.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{kolumna 1} & \text{kol 2} & \dots & \text{wyraz, element} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{wiersz 1} \\ \text{wiersz 2} \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

- Wymiarem macierzy nazywamy wyrażenie:

  (Liczba wierszy) $\times$ (Liczba kolumn)

Przykład. Macierz A ma wymiar 3×4

- Zbiór macierzy wymiaru $k \times l$ nad Z oznaczamy

$$Z^{k \times l}.$$

- Przez A_{ij} oznaczamy wyraz macierzy A leżący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

Przykład:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

3×4.

$B \in \mathbb{R}$

$B_{11} = 1$

$B_{23} = 8$

$B_{34} = 1$.

- Def Macierz nazywamy kwadratową jeśli liczba jej wierszy równa jest liczbie kolumn.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

przekątna (główna).

-

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- Inne oznaczenie

$A = \{a_{ij}\}_{i<k}^{i<w}$, wtedy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$

UWAGA. A^B - zbiór funkcji : $B \to A$.

- $A^{k \times l} \overset{\text{ozn}}{=} A^{\{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,l\}} = \{ f : \{1,2..k\} \times \{1,2,..l\} \to A : f \text{ funkcja} \}$

- $M_{ij} \overset{\text{ozn}}{=} M(i,j)$.

DZIAŁANIA NA MACIERZACH.

Transponowanie macierzy.

Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Def. Niech $A \in Z^{k \times l}$. Transpozycją macierzy A nazywamy macierz, $A^T \in Z^{l \times k}$ taką, że:

$$\forall i, j \quad (A^T)_{ij} = A_{ji}$$

- Dodawanie i mnożenie.

Zakładamy, że elementy macierzy należą do pierścienia.

Dodawanie:

Np: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 & 3+4 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Obserwacja: wymiary macierzy muszą być równe.

Def: Niech $A, B \in P^{k \times l}$. Wtedy sumę $A+B$ def:

$$(\forall i, j) \quad (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

WŁASNOŚCI.

1. Zbiór macierzy ustalonego wymiaru z dodawaniem jest grupą przemienną.

2. $\forall A, B \in P^{k \times l} \quad (A+B)^T = A^T + B^T$

D-d.

1. Łączność: $A, B, C \in P^{k \times l}$.

1.1 $(A+(B+C))_{ij} = A_{ij} + (B+C)_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij})$ // Ł w P
$((A+B)+C)_{ij} = (A+B)_{ij} + C_{ij} = (A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij}$

1.2 Element neutralny dodawania: $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots \end{bmatrix}$.

1.3 Element odwrotny do A to $-A$ taka, że $(-A)_{ij} = -A_{ij}$

Np: $-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

2. $((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$
$= (A^T + B^T)_{ij}$ □

- Mnożenie macierzy przez skalar

$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

F: $(a \cdot A)^T = a \cdot A^T$ ← ćw

Mnożenie macierzy:

Np:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = $$

$(1\,2\,3)\circ(2\,1\,5) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 5$

$(1\,2\,3)\circ(3\,4\,2) = 3+8+6 = 17$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 19 & 17 \\ 43 & 44 \end{bmatrix} \end{array}$$

A_{21}

Obserwacje.

- Niech $A \in P^{k\times l}$, $B \in P^{m\times n}$. Mnożenie $A\cdot B$ jest wykonalne gdy $l = m$ i wtedy $A\cdot B \in P^{k\times n}$.
- Jeśli $A \in P^{k\times l}$, $B \in P^{l\times n}$ to

$$(\forall_{i,j})\,(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} (A_{ik}\cdot B_{kj}).$$

Własności.

1. Mnożenie macierzy jest łączne.
2. Mnożenie macierzy NIE jest przemienne.
3. $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

D-d.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \neq$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

3. ćw.

Obserwacja:

Dla jakich wymiarów macierzy A,B wykonalne jest działanie:

(*) $A \circ B + B \circ A$??

Niech $A \in P^{k\times l}$, $B \in P^{m\cdot n}$

$$\overset{k\times l}{A} \cdot \overset{m\times n}{B} + \overset{m\times n}{B} \cdot \overset{k\times l}{A}$$

(*) możliwe gdy:

- możliwe: $m = l$ (dla $A \cdot B$), $n = k$ (dla $B \cdot A$)
  - wynik $A \cdot B \in k\times n$
  - wynik $B \cdot A \in m \times l$
- $+$ możliwe: $k = m$, $n = l$

$$\left.\begin{aligned} m &= l \\ n &= k \\ k &= m \\ n &= l \end{aligned}\right\} \quad m = l = n = k$$

tzn A i B kwadratowe.

Wniosek: macierze A,B muszą być kwadratowe równego wymiaru.

Tw. Niech P pierścień, $n \in \mathbb{N}^+$. Wtedy

$(P^{n\times n}, +, \cdot)$ jest pierścieniem.

- Dla $n \geq 2$ $P^{n\times n}$ posiada dzielniki zera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$$

- Dla $n \geq 2$ $P^{n\times n}$ jest nieprzemienny.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$