PIERŚCIEŃ MACIERZY.

Def Niech P pierścień z 1, $n \in \mathbb{N}^+$. Macierz identycznościową $I_n \in P^{n \times n}$ definiujemy:
$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Np: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

Fakt. Macierz I_n jest elementem neutralnym mnożenia (jedynką) w pierścieniu $P^{n \times n}$.

Np: $n=2$
$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$
$$A \cdot I_2 = A$$

Def. Niech P pierścień z 1, $n \in \mathbb{N}^+$.
Macierz $B \in P^{n \times n}$ nazywamy macierzą odwrotną do $A \in P^{n \times n}$, gdy
$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$
ozn. $B = A^{-1}$

Przykład.
Oblicz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$? Oznaczmy $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Wtedy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To daje układ równań
$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+4z=0 \\ y+2t=0 \\ 3y+4t=1 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} x=-2 \\ z=\frac{3}{2} \\ y=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

Przykład 2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Wtedy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ to daje układ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ \vdots \end{cases}$

Układ jest sprzeczny, więc:

Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest odwracalna.

Fakt. Jeśli P pierścień z 1 to
$P^* = (\{a \in P : a \text{ jest odwracalny}\}, \cdot)$
jest grupą.

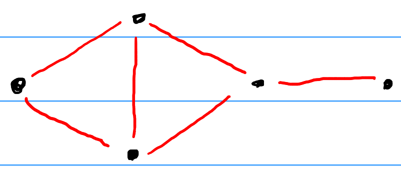
Wniosek: Niech K ciało.

Wtedy $(K^{n\times n})^* = \{M \in K^{n\times n} : M \text{ odwracalna}\} = GL_n(K)$ grupa (liniowa).

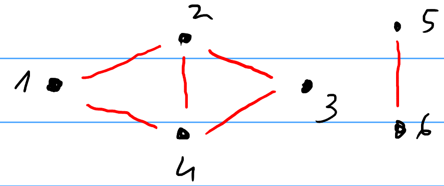
ZASTOSOWANIA.

- Graf to zbiór wierzchołków połączonych krawędziami... :

Przykł: Γ_1 :



Γ_2 :



- wierzchołki numerujemy 1, 2, 3, ...

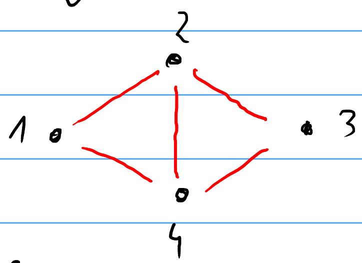
PYTANIE ?

Ile jest dróg długości n z wierzchołka i do j ???

Macierz sąsiedztwa grafu Γ o n wierzchołkach to taka macierz $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, że:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli istnieje krawędź między } i \text{ a } j. \\ 0 & \text{przeciwnie.} \end{cases}$$

- Przykład: Γ :



$A_{11} = 0$

$A_{12} = 1$

$A_{13} = 0$

$A_{14} = 1$

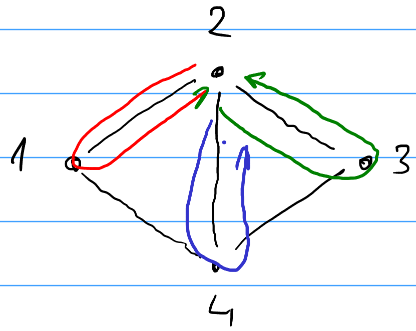
- Macierz sąsiedztwa.

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Obserwacja.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{2}\,? & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Rozważmy element $(A^2)_{22} = 3$.

$(A^2)_{22} = 3 = 1 + 1 + 1$, każda z 1 odpowiada drodze długości 2 z wierzchołka 2 do wierzchołka 2 :

1: 2-1-2, 1: 2-4-2, 1: 2-3-2.

Wniosek. 1. $(A^2)_{ij}$ - liczba dróg długości 2 z wierzchołka i do j.

2. $(A^n)_{ij}$ liczba dróg długości n z wierzchołka i do j.

Reprezentacje macierzowe $\mathbb{C}$:

- Liczbie zespolonej $a+bi$ przypisujemy macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
- $\varphi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ jest różnowartościowym homomorfizmem pierścieni.

D-d ozn $z = a+bi$, $s = c+di$

$z+s$:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

φ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow !!$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix}$$

Więc $\varphi(z+s) = \varphi(z) + \varphi(s)$

$z \cdot s$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow !$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{bmatrix}$$

więc $\varphi(z \cdot s) = \varphi(z) \cdot \varphi(s)$. $\square$

Wniosek $\left(\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right) \underset{\text{izo}}{\cong} (\mathbb{C}, +, \cdot)$

Koment. Można myśleć o macierzach jako o rozszerzeniu liczb zespolonych

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \vdots \; \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \cdots \hookrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$