PRZESTRZENIE LINIOWE

P: Wektory na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Def Niech $(K,+,\cdot)$ ciało.
Przestrzenią liniową nad ciałem K nazywamy $(V,+,\cdot)$, gdzie
V - zbiór, nazywany zbiorem wektorów,
$+ : V \times V \to V$, dodawanie wektorów,
$\cdot : K \times V \to V$, mnożenie przez skalar.
Spełniające:
1. $(V,+)$ jest grupą przemienną,
oraz dla dowolnych $k,l \in K$, $v,w \in V$ zachodzi:
2. $k\cdot(v+w) = k\cdot v + k\cdot w$
3. $(k+l)\cdot v = k\cdot v + l\cdot v$
4. $(k\cdot l)\cdot v = k\cdot(l\cdot v)$.
5. $1\cdot v = v$.

Przykłady

P1. $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$, przestrzeń lin nad ciałem $\mathbb{R}$.
$+ : (x,y)+(a,b) = (x+a, y+b)$
$\cdot : k\cdot(x,y) = (k\cdot x, k\cdot y)$

Sprawdzić (1)–(5)
(2): ozn $v=(x,y)$, $w=(a,b)$
$k(v+w) = k\cdot((x,y)+(a,b)) = k(x+a, y+b) = (k(x+a), k\cdot(y+b))$ $\|$
$kv+kw = k(x,y)+k(a,b) = (kx,ky)+(ka,kb) = (kx+ka, ky+kb)$
(2) jest spełniony. $\square$

P2. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ analogicznie.
P.3 Niech $n\in\mathbb{N}^+$
$(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ przestrz. liniowa nad $\mathbb{R}$:

· $\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

$+ :$ $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$.

$\cdot :$ $k(x_1,x_2,\dots,x_n) = (k\cdot x_1, k\cdot x_2,\dots,k\cdot x_n)$

Sprawdzić własn. (1) - (5).

P4. $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ - przestrzeń lin nad $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}^n = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{C}\}$

P5. Niech K - ciało. Przestrzeń wielomianów.

$(K[x],+,\cdot)$ - przestrzeń lin. nad K.

$+ :$ $\sum_k a_k x^k + \sum_k b_k x^k = \sum_k (a_k+b_k)x^k$.

$\cdot :$ $t\cdot \sum_k a_k x^k = \sum_k t a_k \cdot x^k$

P6. Przestrzenie liniowe nad skończonym ciałem.

Przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_2$.

$(\mathbb{Z}_2^3,+,\cdot)$.

$\mathbb{Z}_2^3 = \{(b_1,b_2,b_3) : b_i \in \{0,1\}\}$ $\quad |\mathbb{Z}_2^3| = 8$.

$+ :$ $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1 +_2 y_1, x_2 +_2 y_2, x_3 +_2 y_3)$.

$\cdot :$ $k\cdot(x_1,x_2,x_3) = (k \cdot_2 x_1, k \cdot_2 x_2, k \cdot_2 x_3) = \begin{cases} (0,0,0) = 0 & k=0 \\ (x_1,x_2,x_3) & k=0 \end{cases}$

P7. Przestrzeń funkcji ciągłych nad $\mathbb{R}$.

$(C[\mathbb{R},\mathbb{R}],+,\cdot)$:

$C[\mathbb{R},\mathbb{R}] = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f \text{ jest ciągła}\}$

$+ :$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

$\cdot :$ $(k\cdot f)(x) = k\cdot f(x)$.

P8. Liczby $\mathbb{C}$ są przest. liniowe nad $\mathbb{R}$.

Oznaczenia:

- $\mathbb{0}$ - wektor zerowy tzn element neutralny wzgl $+$.
- $-v$ - wektor przeciwny do v wzgl $+$.

Fakt. Niech $\bar{V}$ przestrzeń liniowa nad ciałem K.

1. $\forall v \in \bar{V} \quad 0 \cdot v = \mathbb{0}$
2. $\forall v \in \bar{V} \quad (-1) \cdot v = -v$

D-d.

1. Zauważmy:

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

$$0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \quad \Big| + -(0 \cdot v)$$

więc: $\quad \mathbb{0} = 0 \cdot v$

2. $$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1+(-1)) \cdot v = 0 \cdot v \overset{1}{=} \mathbb{0}$$

$$v + (-1) \cdot v = \mathbb{0} \quad \Big| + -v$$

$$(-1) \cdot v = -v \qquad \square$$

Def. Niech $\bar{V}$ przestrzeń liniowa nad K, $A \subseteq V$.

Zbiór A nazywamy podprzestrzenią liniową gdy:

1. $(\forall v, w \in A) \quad v + w \in A$.
2. $(\forall k \in K \ \forall v \in A) \quad k \cdot v \in A$. $\qquad$ ozn $A \leqslant V$

Przykład. Niech $V = \mathbb{R}^3$, $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,y,z) : z = 0\}$

$A \leqslant \bar{V}$ bo 1. Niech $v, w \in A$, wtedy $v = (x, y, 0)$, $w = (a, b, 0)$

$$v + w = (x+a, y+b, 0) \in A.$$

2. Niech $k \in \mathbb{R}$, $v \in A$, wtedy $v = (x, y, 0)$

$$k \cdot v = (k \cdot x, k y, 0) \in A \qquad \square$$

UWAGA Niech $(V, +, \cdot)$ przestrzeń liniowa nad K oraz $W \leqslant \bar{V}$.

Wtedy $(W, +, \cdot)$ przestrzeń liniowa nad K.

D-d: ćw.

Def. Niech V przestrzeń liniowa nad ciałem K.
$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dowolny wektor postaci:
$k_1 \cdot v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$, gdzie $k_1, \dots, k_n \in K$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, v_2, \dots v_n$.

Przykład. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,4)$
Wtedy $3 \cdot (1,2) + 4(3,4) = (3,6) + (12,16) = (15,22)$
jest komb. liniową v_1, v_2

Def. Niech V przest. liniowa nad K.
$A \subseteq V$. Liniowym domknięciem zbioru A nazywamy zbiór wszystkich komb. liniowych wektorów ze zbioru A:

skończenie wiele składników.

$$\mathrm{Span}(A) = \{ \sum k_i v_i : k_i \in K, v_i \in A \}$$ ozn: $\mathrm{Lin}(A)$, $\langle A \rangle$.

Przykład. $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$$\mathrm{Span}(A) = \{ k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) : k_1, k_2 \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{(k_1, k_2, 0) : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$; płaszczyzna OXY

Fakt. Niech V przestrzeń liniowa nad K, $A \subseteq V$.
Wtedy $\mathrm{Span}(A) \leq V$.

D-d: Niech $v, w \in \mathrm{Span}(A)$, $k \in K$. Wtedy:
$v = \sum_i k_i \cdot v_i$, $w = \sum_i l_i v_i$, $v_i \in A$, $k_i, l_i \in K$

1. $v + w = \sum_i (k_i + l_i) \cdot v_i \in \mathrm{Span}(A)$

2. $k \cdot v = \sum_i (k \cdot k_i) \cdot v \in \mathrm{Span}(A)$ $\square$

Def. Niech V przestrzeń liniowa nad K, $A \neq \emptyset$.
Zbiór wektorów $A \subseteq V$ nazywamy liniowo niezależnym, gdy żaden wektor $v \in A$ nie jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru $A \setminus \{v\}$.
tzn $\forall v \in A \quad v \notin \mathrm{Span}(A \setminus \{v\})$.
Przeciwnie, A nazywamy liniowo zależnym.

Przykład. Niech $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ jest liniowo niezależny:
- $(1,0,0)$ nie jest komb. lin $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ gdyż każda komb. jest postaci:
$x \cdot (0,1,0) + y(0,0,1) = (0,x,y) \neq (1,0,0)$.

P2. Zbiór $\{(0,1),(1,0),(2,3)\}$ jest lin zależny bo $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$.

Fakt. Zbiór wektorów $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ jest liniowo niezależny
$\Longleftrightarrow$
$$(\forall k_1, k_2, \ldots, k_n \in K) \quad \sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \mathbb{0} \longrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$$

Przykład. Zbiór $\{(1,2,3),(1,2,0),(1,0,0)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^3$:
Niech k_1, k_2, k_3 takie że
$k_1(1,2,3) + k_2(1,2,0) + k_3(1,0,0) = \mathbb{0} = (0,0,0)$
Wtedy: $(k_1+k_2+k_3,\ 2k_1+2k_2,\ 3k_1) = (0,0,0)$
Więc $\begin{cases} k_1+k_2+k_3 = 0 \\ 2k_1+2k_2 = 0 \\ 3k_1 = 0 \end{cases}$ Jedyne rozwiązanie $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
Więc zbiór jest lin. niezależny.