Przypomnienie

• Przestrzeń Liniowa nad ciałem K to $(V, \overset{v+v}{+}, \overset{k\cdot v}{\cdot})$
speł własności "podobne" do wekt na płaszczyźnie.

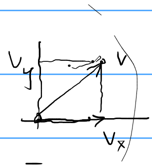
Przykład Niech K ciało. $(K^{n\times m}, +, \overset{\text{liczba}\cdot\text{macierz}}{\cdot})$.

• $W \le V$, jest podprzestrzenią V gdy
$\forall_{v,w \in W} \quad k\cdot v + l w \in W$.

Uwaga Niech V p. lin nad K:
$\{0\}, V \le V$.

Podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$:

1. $\{0\} = \{(0,0,0)\} \le \mathbb{R}^3$
2. Proste przechodzące przez środek układu współrzędnych
bo $v \in W$ to $k\cdot v \in W$, $\{k\cdot v : k \in \mathbb{R}\}$ – prosta



3. Płaszczyzny przechodzące przez $(0,0,0)$.
$v, w \in W$, to $kv + lw \in W$ $\quad \{kv + l\cdot w : k,l \in \mathbb{R}\}$ – płaszczyzna
4. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$
Niech $v,w,u \in \mathbb{R}^3$ niewspółliniowe $\{k\cdot v + l\cdot w + m\cdot u : k,l,m \in \mathbb{R}\}$

P2. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z = t\}$. Wtedy $W \le \mathbb{R}^4$
bo:

Niech $v,w \in W$, $k \in \mathbb{R}$
Wtedy $v = (x,y,z,t)$ gdzie $t = x+y+z$
$w = (a,b,c,d)$ $\qquad d = a+b+c$

1. $v+w = (x+a, y+b, z+c, t+d) \in W$ bo
$t+d = \underline{x+y+z} + a+b+c = (x+a)+(y+b)+(z+c)$
2. $k\cdot v = (kx, ky, kz, kt) \in W$
$kt = k(x+y+z) = kx + ky + kz$

Uwaga Niech $(V,+,\cdot)$ przestrzeń liniowa nad K, $W \leq \overset{\ast 0}{V}$ wtedy:
$(W,+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową nad K.

D-d ← ćw. $[\ \mathbb{0} \in W$ bo $v \in W \to 0 \cdot v \in W$ tz $\mathbb{0} \in W\ ]$

Przykład. Udowodnić, że $K_n[x] = (\{f \in K[x] : st(f) \leq n\}, +, \cdot)$
jest przestrzenią liniową.
D-d Wiemy $K[x]$ jest przestrzenią liniową,
Wystarczy $K_n[x] \leq K[x]$ tzn
(1) $f, g \in K_n[x] \to f+g \in K_n[x]$ ok.
2 $k \in K,\ f \in K_n[x] \to k \cdot f \in K_n[x]$ ok.

- Kombinacją liniową wekt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazywamy każdy wektor $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$ gdzie $k_1 \ldots k_n \in K$.

- $\mathrm{Span}(A)$ = zbiór kombinacji liniowych wekt z A.
$\mathrm{Span}(A) \leq V$, gdy $A \subseteq V$.

- Niech V przestrzeń liniowa nad K, $A \subseteq V$.
Zbiór A nazywamy liniowo niezależnym, gdy:
$\forall v \in A \quad v \notin \mathrm{Span}(A \setminus \{v\})$.
- Przykład $\{(1,0),(0,1)\}$ są lin. niezal.
$(1,0) \neq k(0,1) = (0,k)$

Fakt. Zbiór $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ jest liniowo niezależny $\leftrightarrow$
$\forall k_1 k_2 \ldots k_n \in K \quad \sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \mathbb{0} \to k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

D-d. $\to$:
Niewprost, niech dla pewnych $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nie wszystkich równych 0
zachodzi $\sum_i k_i v_i = \mathbb{0}$

tzn $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = \mathbb{0}$ bzo $k_1 \neq 0$.

$$k_1v_1 = -k_2v_2 - \dots - k_nv_n \quad | \cdot k_1^{-1}$$

$$v_1 = -\frac{k_2}{k_1}v_2 - \frac{k_3}{k_1}v_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1}v_n$$

Więc $v_1 \in \mathrm{Span}\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$

Więc $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ NIE jest liniowo niezal.

$\Leftarrow$: Nie wprost załóżmy że A nie jest liniowo niezal

tzn, że dla pewnego $v_i \in A$. $v_i \in \mathrm{Span}(A \setminus \{v_i\})$

Więc

$$v_i = k_1v_1 + k_2v_2 + k_{i-1}v_{i-1} + k_{i+1}v_{i+1} + \dots + k_nv_n$$

Wtedy $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + \dots + k_nv_n = \mathbb{0}$

Zauważmy, że nie wszyst współczynniki są zerami.

Warunek z Faktu nie jest spełniony. $\square$

BAZA PRZESTRZENI.

Def Niech V przestrzeń liniowa nad K, $B \subseteq V$

Zbiór B nazywamy bazą V gdy:

1. B jest liniowo niezależny
2. $\mathrm{Span}(B) = V$

Przykład. $B = \{(1,0), (0,1)\}$ baza $\mathbb{R}^2$ bo

1. B jest liniowo niezależny, wiemy.
2. $\mathrm{Span}(B) = \{x \cdot (1,0) + y(0,1) : x, y \in \mathbb{R}\} =$
$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

P2. $B = \{(1,2), (1,3)\}$ jest bazą $\mathbb{R}^2$ bo.

1. B jest liniowo niezal.

   Niech dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$k_1(1,2) + k_2(1,3) = \mathbb{O} = (0,0)$, wiec

$(\underline{k_1+k_2}, 2k_1+3k_2) = (\underline{0},0)$, wiec

$\begin{cases} k_1+k_2 = 0 \\ 2k_1+3k_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = 0 \end{cases}$ jedyne rozwiazanie $k_1 = k_2 = 0$

wiec zbiór jest liniowo niezal.

2. $\mathrm{Span}(B) = \mathbb{R}^2$

Niech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pokazemy ze istnieją $k_1\, k_2 \in \mathbb{R}$

$k_1(1,2) + k_2(1,3) = (x,y)$

tzn $(k_1+k_2, 2k_1+3k_2) = (x,y)$

tzn, ze układ równań z niewiadomymi $k_1\, k_2$ ma rozwiązanie dla dowolnych parametr x, y.

$\begin{cases} k_1+k_2 = x \\ 2k_1+3k_2 = y \end{cases}$ $\begin{cases} k_2 = y-2x \\ k_1 = 3x-y \end{cases}$, szukane $k_1\, k_2$.

$\square$

P3 Baza podprzestrzeni $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = x+y+z\} \leq \mathbb{R}^4$

Dowolny wektor W jest postaci:

$(x,y,z,t) = (x,y,z,x+y+z) =$

$(x,0,0,x) + (0,y,0,y) + (0,0,z,z) =$

$x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1)$

- $W = \mathrm{Span}\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$

- Pokazać liniowa niezaleznosc ← ćw.

wiec:

$B = \{(1001), (0101), (0011)\}$ – Baza W.

Tw. Niech $\bar{V}$ przestrzeń liniowa nad K.

1. Każda przestrzeń liniowa posiada bazę.
2. Niech $B_1, B_2 \subseteq \bar{V}$ bazy przestrzeni liniowej $\bar{V}$ to $|B_1| = |B_2|$
3. Niech A liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $\bar{V}$ to istnieje $B \supseteq A$ takie, że B jest bazą $\bar{V}$.
4. Niech $B = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$ baza $\bar{V}$, oraz $v \in \bar{V}$. Wtedy istnieje dokładnie jeden ciąg liczb $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ taki, że $v = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n$
5. Maksymalny liniowo niezależny podzbiór $\bar{V}$ jest bazą $\bar{V}$

D-d (4)

Niech $v \in \bar{V}$, skoro $\bar{V} = \mathrm{Span}(B)$, to

$$v = k_1 b_1 + k_2 \cdot b_2 + \dots + k_n b_n \qquad k_i \in K.$$

Jedyność. Załóżmy nie wprost, że istnieją różne ciągi $k_1, k_2 \dots k_n \in K$, $l_1, l_2, \dots l_n \in K$ takie że

1. $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n = v$
2. $l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n = v$

$-$ $(k_1 - l_1) b_1 + (k_2 - l_2) b_2 + \dots + (k_n - l_n) b_n = \mathbb{0}$.

nie wszystkie $(k_i - l_i) = 0$.

zatem $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ jest liniowo zależny. Sprzeczność

$\square$

Def Niech V przestrzeń liniowa nad K.

Wymiarem $\bar{V}$ nazywamy liczbę $|B|$, gdzie B - baza $\bar{V}$.

oznaczamy $\dim(V) = |B|$.

Przykład.
1. $\dim(\mathbb{R}^2) = |\{(1,0), (0,1)\}| = 2$
2. $\dim(\mathbb{R}^3) = |\{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}| = 3$
3. $\dim(\mathbb{R}[x]) = |\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Rozważmy wymiary $\{(x,y,z,t) : t = x+y+z\} \cap \{(x,y,z,t) : x = y\} \subseteq \mathbb{R}^4$