Przypomnienie.

wekt+wekt, liczba·wekt

Przestrzeń liniowa nad K to $(V, +, \cdot)$
podobne do $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
Przykład: $K^n \ni (x_1, x_2, \dots x_n)$: $x_i \in K$.

Jeśli $v = k_1 \cdot v_1 + k_2 v_2 + \dots k_n \cdot v_n$ to v jest komb. lin wekt $v_1, \dots, v_n$

Wszystkie komb liniowe wekt $v_1 \dots v_n$
ozn $\mathrm{Span}\{v_1, \dots v_n\} \leq V$

Zbiór $B \subseteq V$ jest liniowo niezależny gdy
$(\forall\, v \in B)$ $v \notin \mathrm{Span}(B \setminus \{v\})$

BAZA przestrzeni V.
$B \subseteq V$ jest bazą V gdy
- B liniowo niezal
- $\mathrm{Span}(B) = V$

Przykład $\{(1,0,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}$ baza $\mathbb{R}^3$

- Niezależność ok
- Dowód $(x, y, z) = x(1\,0\,0) + y(0\,1\,0) + z(0\,0\,1)$

WŁASNOŚCI Niech V przestrzeń liniowa nad K:

1. V ma bazę (AC)

2. $B_1, B_2 \subseteq V$ bazy $|B_1| = |B_2|$

Wymiar $V = |B|$ - moc bazy

3. Baza uporządkowana $B=(v_1, v_2, \dots v_n \dots)$ taka że $\{v_1 v_2, \dots v_n, \dots\}$ baza V

Niech $B=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ baza uporządkowana V nad K to

$$\forall v \in V \quad \exists! (k_1, k_2, \dots k_n) \in K^n \quad v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots k_n v_n$$

Wtedy $(k_1, k_2, \dots k_n)$ nazywamy współrzędnymi wektora v w bazie B
i oznaczamy $v_B = (k_1, k_2 \dots, k_n)$.

Funkcje Liniowe

Def V, W przestrzenie liniowe nad K.
Funkcję

$$f: V \to W$$

nazywamy liniową, gdy:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall k \in K \ \forall v \in V \quad f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$

Przykłady:

1. $f((x,y)) = (2x+y, x+3y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Jest liniowe bo:

(1): Niech $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Wtedy $v_1 = (x,y)$, $v_2 = (z,t)$

$f(v_1+v_2) = f(x+z, y+t) = \left(\underline{2(x+z)} + \underline{(y+t)},\ (x+z)+3(y+t)\right)$

$\|$

$f(v_1)+f(v_2) = f(x,y)+f(z,t) = (\underline{2x}+\underline{y},\ x+3y) + (\underline{2z}+\underline{t},\ z+3t)$

(2) Niech $k \in \mathbb{R}$ $v \in \mathbb{R}^2$, $v=(x,y)$

$f(kv) = f(kx, ky) = \dots$

$k \cdot f(v) \quad kf(x,y) = \dots$

<u>Uwaga</u> Współrzędne $f(-)$ są rozważane niezależnie.

Przykłady negatywne

- $f(x,y) = x^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(2) Niech $v=(x,y)$:

$f(2\cdot v) = f((2x, 2y)) = (2x)^2 = 4x^2$

$2f(v) = 2f(x,y) = 2\cdot x^2$ $\not=$

f NIE jest liniowa.

- $g(x,y) = x\cdot y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(2): $v=(x,y)$

$g(2v) = g(2x, 2y) = 2x\cdot 2y = 4xy$

$2g(v) = 2g(x,y) = 2\cdot x\cdot y$ $\not=$

g NIE jest liniowa.

- $h(x,y) = 5$ NIE jest liniowa $\leftarrow$ ćw.

Fakt. Niech $f: V \to W$ funkcja liniowa.
1. $f(\mathbb{O}_V) = \mathbb{O}_W$
2. $\forall v \in V \quad f(-v) = -f(v)$

D-d: 1. $f(\mathbb{O}_V) = f(0 \cdot \mathbb{O}_V) \stackrel{L2}{=} 0 \cdot f(\mathbb{O}_V) = \mathbb{O}_W$

2. $f(-v) = f((-1) \cdot v) \stackrel{L2}{=} (-1) \cdot f(v) = -f(v)$. $\square$

Przykłady.

Funkcje liniowe $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Niech f j.w:

Oznaczmy: $f(1,0) = (a,b)$, $f(0,1) = (c,d)$
Wtedy:

$$f(x,y) = f(\underbrace{x \cdot (1,0)} + \underbrace{y \cdot (0,1)}) \stackrel{L1}{=} f(x \cdot (1,0)) + f(y \cdot (0,1)) =$$
$$\stackrel{L2}{=} x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = x(a,b) + y(c,d)$$
$$= (ax+cy, bx+dy) = f(x,y) \quad \square$$

Obserwacja 1. Jeśli znamy wartości funkcji liniowej na bazie przestrzeni to znamy całą funkcję.

Obserwacja 2: Funkcje liniowe $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mają być postaci

$$f(x,y,z,t\dots) = (\underset{\text{ok}}{ax+by+cz+dt},\ \underset{\text{ok}}{2x+3y+7t},\ \cancel{x^2},\ \cancel{y^2},\ \cancel{x\cdot y},\ \cancel{1},\ \cancel{x+1}$$

Inne przykłady.

1. Niech $V = C_\infty[\mathbb{R},\mathbb{R}] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{(k)} \text{ istnieje}\}$ $\mathbb{R}[X]$
przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$.

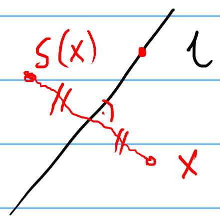
Wtedy $d(f) = f' : C_\infty[\mathbb{R}\mathbb{R}] \to C_\infty[\mathbb{R},\mathbb{R}]$
jest liniowe: $f,g \in C_\infty$, $k \in \mathbb{R}$:

(1) $d(f+g) = (f+g)' = f'+g' = d(f)+d(g)$

(2): $d(k\cdot f) = (k\cdot f)' = k\cdot f' = k\cdot d(f)$

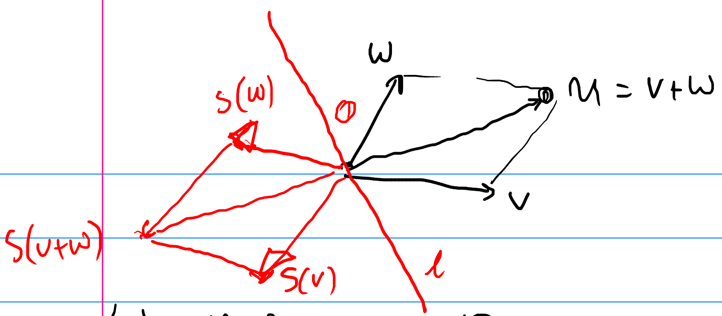
2. Symetria względem prostej

Niech l prosta w $\mathbb{R}^2$, $(0,0) \in l$.
Wtedy $S_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ symetria wzgl l jest
jest funkcją liniową:



S_l jest liniowe:

Uwaga Niech $v,w,u \in \mathbb{R}^2$ to
$v+w=u \iff$ • $0,v,w,u$ tworzą równoległobok
• u jest przekątną:



(1): Wektory 0, v, w, $v+w$ tworzą równoległobok oraz $v+w$ jest jego przekątną

Więc słowo S_L zachowuje kształty:

$S_L(0)$, $S_L(v)$, $S_L(w)$, $S_L(v+w)$ tworzą równoległobok oraz $S_L(v+w)$ jest przekątną

Więc $S_L(v) + S_L(w) = S_L(v+w)$

(2) $S_L(k \cdot v) = k \cdot S_L(v)$ ← ćw

Przykład.

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f(1,3) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$$

f jest liniowa bo

ozn $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A$.

Wtedy

$$f(v) = A \cdot v^T$$

rozd mnoż wzg +

(1) $f(v+w) = A \cdot (v+w)^T = A(v^T + w^T) = A \cdot v^T + Aw^T$

$= f(v) + f(w)$

(2) $f(k\cdot v) = A\cdot(kv)^T \stackrel{?}{=} \ = k\cdot Av^T = k\cdot f(v)$

Obserwacja. mnożenie wektorów przez macierz jest funkcją liniową.

Np: $f(x,y,z) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$g(x,y) = (x,y)\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ Są liniowe.

Def Funkcję liniową $f: V \to W$ nazywamy izomorfizmem liniowym gdy jest bijekcją

Przykład.

$f(a_0 + a_1x^1 + \dots a_nx^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$
jest izomorfizmem liniowym.

1. f jest liniowe
2. f jest na   ćw.
3. f jest 1-1

Własności. Niech V, W, U przestrzenie liniowe nad K.
$f: V \to W$, $g: W \to U$ funkcje liniowe to
(1) $g\circ f: V \to U$ jest liniowe.

(2) Jeśli f jest izomorfizmem liniowym to
$f^{-1}: W \to V$ jest izomorf. liniowym.

D-d (1)

Niech $v, w \in V$. Wtedy

(1) $g \circ f(v+w) = g(f(v+w)) \overset{f\,Lin}{=} g(f(v)+f(w)) \overset{g\,Lin}{=}$

$= g(f(v)) + g(f(w)) = g\circ f(v) + g\circ f(w)$

(2) $g\circ f(k\cdot v) = g(f(kv)) \overset{f\,Lin}{=} g(k\cdot f(v)) \overset{g\,Lin}{=} k\cdot g(f(v)) =$

$k \cdot g\circ f(v)$ $\square$

Przykład Niech $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uporządkowana baza przestrzeni V/K. Wtedy

$f(v) = v_B : V \longrightarrow K^n$ jest izomorfizmem liniowym

Dowód.

$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 \ldots + k_n v_n$

$w = l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots + l_n v_n$

$v_B = (k_1\ k_2\ \ldots\ k_n)$

$w_B\ (l_1\ l_2\ \ldots\ l_n)$

$(v+w)_B = ((k_1+l_1)v_1 + (k_2+l_2)\ v_2 \ldots + (k_n+l_n)v_n)_B =$

$(k_1+l_1, k_2+l_2, \ldots\ k_n+l_n) = v_B + w_B$

Więc (1): $f(v+w) = (v+w)_B = v_B + w_B = f(v) + f(w)$

(2):