Funkcje Liniowe, Macierze.

- Jeśli $A \in K^{k\times l}$, wtedy funkcja $f_A(v) = A\cdot v : K^k \to K^l$

Przykład $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

$f(x,y,z) = A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ jest liniowa

Notacja: Elementy $K^n$ zapisujemy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

dopuszczalny zapis $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Uporządkowana baza standardowa przestrzeni $K^n$

to

$$E = \big( (1,0,0,\ldots,0) = e_1,\ (0,1,0,\ldots,0) = e_2,\ \vdots,\ (0,0,\ldots,1) = e_n \big)$$

Fakt Niech $V, W$ przestrzenie liniowe nad $K$ oraz $B$ baza $V$

$f,g: V \to W$ funkcje liniowe.

Wtedy $\left[\forall v\in B \quad f(v) = g(v)\right] \to \left[\forall v\in V \quad f(v) = g(v)\right]$

D-d. Niech $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Dla dowolnego $v \in V$ $\exists (k_1 k_2 \ldots k_n) \in K^n$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot v_i$

Wtedy $f(v) = f\left(\sum k_i v_i\right) \overset{\text{Lin } f}{=} \sum k_i f(v_i) = \sum k_i g(v_i)$

$\overset{\text{Lin } g}{=} g\left(\sum k_i v_i\right) = g(v)$ $\quad\square$

[ 4

TW Niech $K$ ciało, $f: K^n \to K^m$ funkcja liniowa. Wtedy istnieje macierz $A \in K^{m\times n}$ taka, że

$$\forall v \in K^n \quad f(v) = A\cdot v$$

D-d. Oznaczmy $f(e_i) = f(0,0,\dots \underset{i}{1}, 0,\dots 0) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

Rozważmy macierz

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\begin{array}{c} f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}\end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{f(e_2)}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} =$$

Zauważmy, że $A\cdot e_i = f(e_i)$ *

Funkcje liniowe $A\cdot v$ i $f(v)$ mają te same wart. na bazie $E$:

$$\forall v \in E \quad f(v) = A\cdot v \quad *$$

Zatem na mocy faktu $\forall v \in V \quad f(v) = A\cdot v$ □

ozn: Macierz $A$ nazywamy macierzą funkcji $f$.

Przykłady.

$$f(x,y,z) = (\overset{\overset{x}{3}}{3}x + \overset{\overset{y}{4}}{4}y + \overset{\overset{z}{5}}{5}z, \overset{-1}{-x} + \overset{1}{y} + \overset{2}{2}z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Macierz $f$ to $A \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Spr: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y+5z \\ -1x+1y+2z \end{pmatrix} = f(x,y,z).$

Ćw: Macierz $f(x,y) = (2x+y, 3x+4y, x)$

Fakt. Niech $K$ ciało, $f: K^n \to K^m$, $g: K^m \to K^l$
Niech $A_f$ macierz $f$, $A_g$ macierz $g$. Wtedy

1. Macierz $g \circ f$ jest równa $A_g \cdot A_f$.

2. Jeśli $n=m$ to macierz $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \times}$ jest równa $A_f^n$

3 Jeśli $f$ jest odwracalne $^{m=n}$ to $f^{-1}$ jest równa $A_f^{-1}$

4. Macierz id jest $Id$.

D-d 1. Z łączności mnożenia macierzy:

$$[g \circ f](v) = g(f(v)) = A_g(A_f \cdot v) \stackrel{\text{ł}}{=} (A_g \cdot A_f) \cdot v$$

to znaczy że $A_g \cdot A_f$ jest macierzą $g \circ f$.

2. $f^n(v) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(v) = f(f(\ldots f(v)) = A_f(A_f \cdots (A_f v))\ldots)$

$$\stackrel{\text{ł}}{=} (A_f \cdot A_f \cdots A_f) \cdot v = A_f^n \cdot v$$

Więc $A_f^n$ jest macierzą funkcji $f^n$

3, 4 ćw. $\square$

- Macierz zmiany bazy.

Fakt Niech $V$ przestrzeń liniowa nad $K$, $\dim(V) = n$.
oraz $B_1, B_2$ bazy uporządkowane przestrzeni $V$

Wtedy istnieje macierz $P_{B_1B_2} \in K^{n\times n}$ taka, że

$\forall v \in V \quad v_{B_2} = P_{B_1B_2} \cdot v_{B_1}$.

Przypomnienie.
Jeśli $B = (b_1, b_2 \dots b_n)$ uporząd. baza $V/K$ to

$\forall v \in V \quad \exists! (k_1, k_2 \dots k_n) \quad v = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n$

Wtedy $(k_1, k_2, \dots k_n) = v_B$ – współrzędne $v$ w bazie $B$

• Funkcja $\varphi_B(v) = v_B$ izomorfizm liniowy

D-d. Funkcje $\varphi_{B_1}(v) = v_{B_1} : V \to K^n$

$\varphi_{B_2}(v) = v_{B_2} : V \to K^n$

Są izomorfizmami liniowymi

$$\begin{tikzcd} & K^n \arrow[d, "\varphi_{B_2} \circ \varphi_{B_1}^{-1}"] \\ V \arrow[ur, "\varphi_{B_1}"] \arrow[r, "\varphi_{B_2}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

$K^n \xrightarrow{\varphi_{B_1}^{-1}} V \xrightarrow{\varphi_{B_2}} K^n$

Wtedy $\varphi_{B_1}^{-1}$ jest izomorf liniowym

oraz $\varphi_{B_2} \circ \varphi_{B_1}^{-1} : K^n \to K^n$ jest liniowe

Więc ist macierz $P \in K^{n\times n}$ taka, że

$(\forall w \in K^n) \; \varphi_{B_2} \circ \varphi_{B_1}^{-1}(w) = P \cdot w$.

Niech $v \in V$ wtedy $v_{B_1} = \varphi_{B_1}(v)$

Więc:

$$v_{B_2} = \varphi_{B_2}(v) = \varphi_{B_2}(\underbrace{\varphi_{B_1}^{-1}(\varphi_{B_1}}_{id}(v)) =$$

$$\varphi_{B_2}(\varphi_{B_1}^{-1}(v_{B_1})) = \underbrace{\varphi_{B_2} \circ \varphi_{B_1}^{-1}}_{P}(v_{B_1}) = P \cdot v_{B_1}$$

Więc $P \cdot v_{B_1} = v_{B_2}$

Weźmy $P_{B_1 B_2} = P$ $\square$

Przykłady:

Niech $V = \mathbb{R}^2$, $E = ((1,0), (0,1))$, $B = ((1,2), (1,3))$

Macierz

$P_{BE}$:

Musi spełniać:

- $(1,2)_E = P_{BE} \cdot (1,2)_B$
- $(1,3)_E = P_{BE} \cdot (1,3)_B$

$(1,2)_E$: $(1,2) = \underline{1}(1,0) + \underline{2}(0,1)$

$(1,2)_E = (1,2)$
$(1,3)_E = (1,3)$

$(1,2)_B = \underline{1}(1,2) + \underline{0}(1,3)$

$(1,2)_B = (1,0)$
$(1,3)_B = (0,1)$

$(1,2)_E = P_{BE}(1,2)_B \quad : \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = P_{BE}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$(1\,3)_E = P_{BE}(1\,3)_B \quad : \quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = P_{BE}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

Zatem $P_{BE} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Przykład 2: $V = \mathbb{R}^3$

$B = ((1,2,3),(1,7,0),(0,0,9))$ baza $\mathbb{R}^3$

$$P_{BE} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Zauważmy. $P_{EB} = P_{BE}^{-1}$

Obserwacja. Macierz przejścia z bazy $B=(b_1,b_2\dots b_n)$ do bazy standard $E$ jest równa

$$P_{BE} = \begin{bmatrix}| & | & & |\\ b_1 & b_2 & \dots & b_n\\ | & | & & |\end{bmatrix}$$

Uwaga. Niech $A, B$ bazy $V$, wtedy $P_{BA} = P_{BE}\cdot P_{AE}^{-1}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "P_{BE}"] \arrow[rr, bend right, "P_{BE}\cdot P_{AE}^{-1}"'] & E \arrow[r, "P_{AE}^{-1}"] & A \end{tikzcd}$$

- Macierz Funkcji w bazie.

Niech $V, W$ przestrzenie liniowe nad $K$

$f: V \to W$ funkcja liniowa.

Niech $A$ baza $V$, $B$ baza $W$.

Macierz $M$ nazywamy macierzą $f$ w bazach $A$ $B$ gdy

$$\forall v \in V \qquad M \cdot v_A = (f(v))_B$$

Przykład.

Niech $V = W = \mathbb{R}_2[x] = \{ f \in \mathbb{R}[x] : st\, f \leq 2 \}$

$$d(f) = f' : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$

Niech $A = B = (x^2, x, 1)$ baza $\mathbb{R}_2[x]$

Szukana macierz $M$ spełnia

- $(d(1))_B = M \; 1_A$
- $(d(x))_B = M \; x_A$
- $(d(x^2))_B = M \; x^2{}_A$

$1_A$: $\quad 1 = \underbrace{\ }_{0} x^2 + \underbrace{\ }_{0} x + \underbrace{\ }_{1} 1 \qquad 1_A = (0,0,1)$

$x_A$: $\quad x = \underbrace{\ }_{0} x^2 + \underbrace{\ }_{1} x + \underbrace{\ }_{0} 1 \qquad x_A = (0,1,0)$

$x^2{}_A = (1,0,0)$

$d(1) = 1' = 0 \qquad (d(1))_B = (0,0,0)$

$d(x) = x' = 1 \qquad (d(x))_B = (0,0,1)$

$d(x^2) = x^{2\,\prime} = 2x \qquad (d(x^2))_B = (0,2,0)$

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Więc $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$