Przypomnienie.

Niech V przestrzeń liniowa nad K.
$f: V \to V$ funkcja liniowa
Niech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ bazy $\bar{V}$
$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Każdemu wektorowi $v \in \bar{V}$ odpowiada wektor
$$V_A = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in K^n$$
wektor współrzędnych w A tzn $V = k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + \dots + k_n a_n$

$$V_B = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in K^n \text{ - współrzędne w } B$$

Istnieją macierze

$M_{fA} \in K^{n \times n}$ $\quad \forall v \in \bar{V}$ $\quad M_{fA} \cdot V_A = (f(v))_A$, macierz f w bazie A

$M_{fB} \in K^{n \times n}$ $\quad \forall v \in \bar{V}$ $\quad M_{fB} \cdot V_B = (f(v))_B$

$M_{AB} \in K^{n \times n}$ $\quad \forall v \in \bar{V}$ $\quad M_{AB} \cdot V_A = V_B$ $\quad$ macierz zmiany bazy.

Fakt Przy oznaczeniach jak w.

$$M_{fA} = M_{BA} \cdot M_{fB} \cdot M_{AB}$$

D-d Niech $v \in \bar{V}$, V_A wektor współrzędnych v w bazie A
Zauważmy:

$$(M_{BA} \cdot M_{fB} \cdot \underbrace{M_{AB}) \cdot V_A}_{} \overset{\text{Ł}}{=} M_{BA} \cdot \underbrace{M_{fB} \cdot V_B}_{} = M_{BA} \cdot (f(v))_B =$$

$$(f(v))_A = M_{fA} \cdot V_A$$

Więc $\forall v \in V$

$(M_{BA}\cdot M_{fB}\cdot M_{AB})\cdot v_A = M_{fA}\cdot v_A$

Więc $M_{BA}\cdot M_{fB}\cdot M_{AB} = M_{fA}$ $\square$

Przykład

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 5 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}$$

Niech $f(x,y,z) = (3x+4y+5z,\ x-y+z,\ 2x+3y-z,\ \cancel{x^2},\ \cancel{x\cdot y})$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$A = ((2,3,4),(0,2,3),(0,0,7))$ baza $\mathbb{R}^3$

$B = E = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

Mamy $M_{fB} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$M_{fA} = ??$

$M_{AE} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$M_{fA} \overset{F}{=} M_{BA}\cdot M_{fB}\cdot M_{AB} \overset{B=E}{=} M_{EA}\cdot \underline{M_{fE}}\ \underline{M_{AE}} = \underline{M_{AE}^{-1}}\cdot \underline{M_{fB}}\cdot \underline{M_{AE}}$

= Wolfram alpha.

Zapis macierzy w WA: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \overset{WA}{=} \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$

Jądro i obraz funkcji liniowej

Def Niech V, W przestrzenie liniowe nad K.

$f: V \to W$ funkcja liniowa.

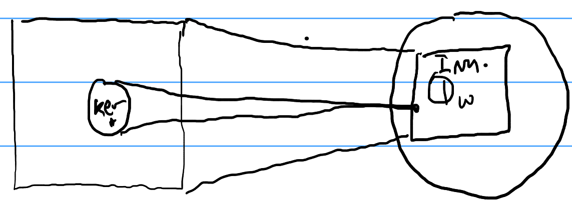
1. Jądrem f nazywamy zbiór

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0_W \} \subseteq V$$

2. Obrazem f nazywamy zbiór

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W : \exists_{v \in V} \; f(v) = w \}$$

$$V : \xrightarrow{f} W$$



Przykłady:

$$f(x,y) = (x+y, 0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0) \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\underline{x+y}, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0}) \}$$
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0 \}$$ – prosta o rów. $y = -x$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$ – oś OX.

Przykład 2.

$$f(x,y) = (x+y, x-y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , f(x,y) = (0,0) \} = \{ (x,y) : (x+y, x-y) = (0,0) \}$$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} = \{ (0,0) \}$$

$$\mathrm{Im} = \mathbb{R}^2 \leftarrow \text{ćw.}$$

UWAGA $\forall f$ - lin $\quad \mathrm{Ker}(f) \ni 0$. ćw.

Fakt Funkcja liniowa $f: V \to W$ jest różnowartościowa
$\Longleftrightarrow$
$$Ker(f) = \{0_V\}$$

D-d $: \Leftarrow$

Załóżmy nie wprost że f nie jest 1-1

Tzn istnieje $v_1 \neq v_2 \in V$ takie, że $f(v_1) = f(v_2)$

Wtedy:
$$f(v_1) = f(v_2)$$
$$f(v_1) - f(v_2) = 0$$
lin $\quad f(v_1 - v_2) = 0$

więc $0 \neq v_1 - v_2 \in Ker(f)$

Zatem $Ker(f) \neq \{0_V\}$ Sprzeczność $\square$

$\Rightarrow$, Niech $Ker(f) \neq \{0_V\}$

tzn istnieje $0 \neq v \in Ker f$

tzn $\quad f(v) = 0$

ale także $f(0) = 0$

$\Big\} \to f$ NIE jest różnowartościowa

$\square$.

Przypomnienie $A \subseteq V$ jest podprzestrzenią V gdy:

1. $\forall_{v, w \in A} \quad v + w \in A$
2. $\forall_{k \in K, v \in V} \quad k \cdot v \in A$

Ozn $A \leqslant V$.

Fakt Niech $f: V \to W$ funkcja liniowa. Wtedy:

1. $Ker(f) \leqslant V$
2. $Im(f) \leqslant W$.

D-d. 1.(1) Niech $v, w \in Ker(f)$:

$v \in Ker f \to f(v) = 0$

$w \in \ker f \to f(w) = \mathbb{0}$.

Zauważmy
$$f(v+w) \overset{Lin}{=} f(v) + f(w) = \mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0}$$
tzn $v+w \in \ker f$.

(2). Niech $k \in K$, $v \in \ker f$

$v \in \ker f \to f(v) = \mathbb{0}$

Mamy
$$f(k \cdot v) \overset{Lin}{=} k \cdot f(v) = k \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$$
Więc $k \cdot v \in \ker f$

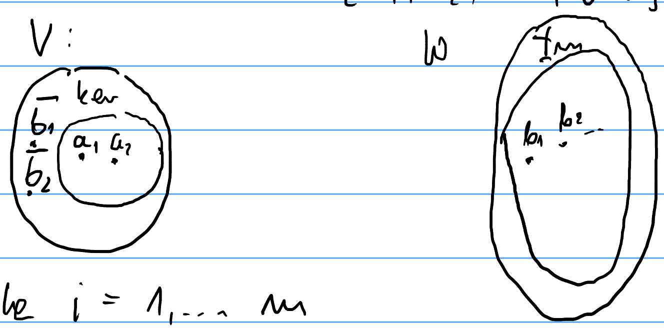
$(1)+(2) \to \ker(f) \leq \bar{V}$ $\square$

2. $\operatorname{Im}(f) \leq W$ cw.

Tw. Niech $f: V \to W$ funkcja liniowa. Wtedy
$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\bar{V}).$$

D-d. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ baza $\ker f$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ baza $\operatorname{Im} f$.



Dla $i = 1, \dots, m$

niech $\bar{b}_i \in \bar{V}$ taki że $f(\bar{b}_i) = b_i$

Wtedy $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_m\}$ jest bazą $\bar{V}$

Z jest liniowo niezależny:

Załóżmy niewprost że Z jest liniowo zależny
tzn istnieją $k_1, k_2, \dots k_n, l_1 \dots l_m$ nie wszystkie zerowe
takie że

$$* \quad k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n + l_1 \overline{b}_1 + l_2 \overline{b}_2 + \dots + l_n \overline{b}_n = 0$$

Obserwacja: Nie wszystkie $l_1, l_2, \dots l_n$ są zerami.
(bo gdyby były to $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots k_n a_n = 0$, i nie wszyst $k_i = 0$,
to niemożliwe bo $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ liniowo niezależny)

$$f(k_1 a_1 + \dots + k_n a_n + l_1 \overline{b}_1 + \dots + l_n \overline{b}_m) = f(0)$$

Lin

$$\underbrace{k_1 \cdot \overset{0}{\cancel{f(a_1)}} + \dots + k_n \cdot f(a_n)}_{0} + l_1 f(\overline{b}_1) + \dots + l_n \cdot f(\overline{b}_m) = 0$$

$$f(a_i) = 0, \quad f(\overline{b}_i) = b_i$$

Otrzymujemy: $l_1 \cdot b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_n b_n = 0$, nie wszystkie $l_i = 0$

Niemożliwe: bo niezerowa kombinacja elementów bazy nie może być wektorem zerowym.

Więc Z jest liniowo niezależny

· Z jest maksymalny liniowo niezależny ← cu.

$Z = \{a_1, a_2 \dots, a_n, \overline{b}_1, \overline{b}_2 \dots, \overline{b}_m\}$ jest bazą V

Więc

$$\dim(V) = |Z| = n + m = |\{a_1 \dots a_n\}| + |\{b_1, b_2, \dots, b_m\}| =$$
$$= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \quad \square$$