Przypomnienie

$f: V \to W$ funkcja liniowa to $\operatorname{Ker} f \leq V$, $\operatorname{Im} f \leq W$

oraz $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

Def. Niech $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ macierz, K_i - i-ta kolumna A

Wtedy rząd macierzy A nazywamy liczbą naturalną

$$\operatorname{Ord}(A) = \max\{|Z| : Z \subseteq \{K_1, K_2, \dots, K_n\},\ Z \text{ lin niezal}\}$$

$$= \dim\left(\operatorname{Span}\{K_1, K_2, \dots K_n\}\right).$$

Przykład:

- $\operatorname{Ord}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ bo kol. są lin niezal

- $\operatorname{Ord}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ bo $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Uwaga $\operatorname{Ord} A$ - max liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy A.

Fakt Niech $f(v) = A \cdot v : K^n \to K^m$ funk. lin
Wtedy

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{Ord} A.$$

D-d. $\operatorname{Im} f = \{A \cdot v : v \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ [K_1\ K_2 \dots K_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : \right\}$

$= \{a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots + a_n K_n : a_1, a_2 \dots a_n \in K\} = \operatorname{Span}\{K_1 \dots K_n\}$

Więc $\quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{K_1, \dots K_n\}$

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Span}\{K_1 \dots K_n\} = \mathrm{Ord}\, A \qquad \square$$

Funkcje Wieloliniowe.

Def. Niech $V_1, V_2, \dots V_k, W$ przestrzenie liniowe nad K
Funkcję
$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \to W$$
nazywamy k-liniową, gdy:

$\forall i \in \{1, \dots k\}\ \forall a_1 \in V_1\ a_2 \in V_2, \dots a_k \in V_k$ funkcja

$$f_i(v) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \underset{i}{v}, a_{i+1} \dots, a_k) : V_i \to W$$

jest funkcją liniową.

Przykład.

1. $\quad f((x,y),(a,b)) = ax + by \ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
jest 2-liniowa, bo:

$i = 1$
$$f_1((x,y)) = f((x,y),(2,3)) = 2x + 3y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ liniowa}$$
$i = 2$
$$f_2((a,b)) = f((5,7),(a,b)) = 5a + 7b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ liniowa}$$

Uwaga f jest iloczyn skalarny

2. $D((x,y),(a,b)) = x \cdot b - y \cdot a \ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
jest 2-liniowa. bo
$i = 1$
$$D_1(x,y) = D((x,y),(9,3)) = 3x - 9y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ liniowa}$$

Uwaga D jest: $D\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = xb - ay$ – wyznacznik.

Obliczenia.

Niech f – 2 liniowe

$$f(v+w, u) = f(v,u) + f(w,u)$$
$$f(k\cdot v, u) = k\cdot f(v,u)$$
$$f(k\cdot v, l\cdot u) = k\cdot l\, f(v,u)$$

Obserwacja: podobieństwo do otwierania nawiasów

$$(v+w)\cdot u = v\cdot u + w\cdot u$$

$$\cdot f(v+w, u+t) = f(v,u) + f(v,t) + f(w,u) + f(w,t)$$

Wyznaczniki macierzy kwadratowych.

Znamy: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\cdot d - b\cdot c.$

Macierz jako wektor kolumn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Def. Wyznacznikiem macierzy wymiaru $n\times n$ nazywamy funkcję n-liniową

$$\det : \underbrace{K^n \times K^n \times \dots \times K^n}_{n\times} \longrightarrow K$$

taką że

1. $\forall_{i\neq j \leq n}\ \forall_{v_1,\dots,v_n \in K^n}$ $\det(v_1,\dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) =$
$- \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$

2. $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$

$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

Uwaga $\det(v_1, \dots, \underset{i}{v}, \dots \underset{j}{v}, \dots v_n) = 0$

D-d Niech $\det(v_1 \dots \underset{i}{v} \dots \underset{j}{v} \dots, v_n) = d$

$$d = \det(v_1 \quad v \quad v \quad v_n) = -d$$

$$d = -d \longrightarrow d = 0 \qquad \square$$

Przykład $n = 2$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \det(e_1, e_2) = 1$$

$$\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \det(e_2, e_1) = -1$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \det(e_1, e_1) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \det(e_2 e_2) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\left(a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \det\left(a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, d\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \dots =$$

$$= a \cdot b \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}_{0} + a \cdot d \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}_{1} + c \cdot b \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}_{-1} + c \cdot d \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}_{0}$$

$$= a \cdot d - bc \qquad \square$$

Operacje elementarne na macierzach.

Obserwacje NA KOLUMNACH

1° $i \neq j$ $\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots v_j \ldots v_n) = -\det(v_1, \ldots v_j \ldots v_i \ldots v_n)$

2° $\det(v_1 \ldots \underset{i}{k \cdot v} \ldots v_n) = k \cdot \det(v_1 \ldots \underset{i}{v} \ldots v_n)$

3 $i \neq j$ $\det(v_1 \; v_i \; \underset{j}{v_j + k v_i} \ldots v_n) \overset{L}{=} \underline{\det(v_1 \; v_i \; v_j \ldots v_n)} +$

$\det(v_1 \ldots v_i \ldots k v_i \ldots v_n) = \det(v_1 \; v_i \; v_j \; v_n) + k \det(v_1 \ldots v_i \ldots v_i \ldots v_n)$

$= \det(v_1 \ldots v_i \ldots v_j \ldots v_n)$

Operacje elementarne na wierszach:

I Zamiana miejscami dwóch wierszy

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} = A'$$

$\det(A') = -\det(A)$

II Pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę k

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ k \cdot d & ke & k \cdot f \\ g & h & i \end{bmatrix} A'$$

$\det(A') = k \cdot \det(A)$

III $i \neq j$. Dodanie do i-tego wiersza k-krot j-tego

$$A\ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} a+kg & b+kh & c+k\cdot i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A'$$

$$\det(A') = \det(A)$$

Zastosowanie, Obliczanie wyznacznika.

1° Macierz przekątniowa

$$\det \begin{bmatrix} c_1, 0, 0 \ldots 0 \\ 0, c_2, 0, \ldots 0 \\ \vdots \\ 0, 0 \ldots c_n \end{bmatrix} = \det(c_1 \cdot e_1, c_2 e_2, \ldots c_n \cdot e_n) =$$

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \cdot \det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots c_n \cdot 1$$

Wyznacznik macierzy przekątniowej to iloczyn elementów na przekątnej.

2° Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{II} \to \text{II} - 3\text{I}]{\text{I} \to \text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{II} \to \text{II}]{\text{I} \to \text{I} + \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det = -2$ $\qquad$ $\det = -2$ $\qquad$ $\det = 1(-2) = (-2)$

Za pomocą operacji elementarnych doprowadzamy macierz do postaci przekątniowej.

Macierze Elementarne

Oznaczmy

$$T_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_i(c) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D_{ij}(c) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & c & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fakt.

Niech $A \in K^{n \times n}$ Wtedy

1. Macierz $A' = T_{ij} \cdot A$ powstaje z macierzy A przez zamianę i-tego i j-tego wiersza (Operacja element. I)
2. Macierz $A' = M_i(c) \cdot A$ powstaje z macierzy A przez pomnożenie wyrazów i-tego wiersza przez c. (operacja II)
3. Macierz $A' = D_{ij}(c) \cdot A$ powstaje z macierzy A przez dodanie do i-tego wiersza c-krotności wiersza j-tego

D-d