Przypomnienie. Macierze elementarne.

Oznaczmy

$$T_{ij} = \begin{array}{c|ccccc} & & i & & j & \\ \hline i & 1\ \ddots\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & & 1\ \ddots\ 1 & & \\ j & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\ \ddots\ 1 \end{array}$$

$$M_i(c) \quad \begin{array}{c|ccc} & & i & \\ \hline i & 1\ \ddots\ 1 & c & 0 \\ & 0 & & 1\ \ddots\ 1 \end{array}$$

$$D_{ij}(c) = \begin{array}{c|ccc} & & i & \\ \hline & 1\ \ddots & 1 & \\ & & & \ddots \\ j & & c & \ddots\ 1 \end{array} = I_n + \delta_{ij}(c) \; ; \; [\delta_{ij}(c)]_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{poza} \\ 1 & i=k \ j=l \end{cases}$$

Fakt.

Niech $A \in K^{n\times n}$ Wtedy

1. Macierz $A' = T_{ij} \cdot A$ powstaje z macierzy A przez zamianę i-tego i j-tego wiersza (Operacja element. I)

2. Macierz $A' = M_i(c) \cdot A$ powstaje z macierzy A przez pomnożenie wyrazów i-tego wiersza przez c. (operacja II)

3 Macierz $A' = D_{ij}(c) \cdot A$ powstaje z macierzy A przez dodanie do i-tego wiersza c-krotności wiersza j-tego

D-d

$D_{ij}(c) \cdot A =$

$$(I + \delta_{ij}(c))A = A + \delta_{ij}(c) \cdot A = A + \begin{array}{c|cccc} & & & j & \\ \hline & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 0 & & c \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c \cdot a_{j1} & c \cdot a_{j2} \cdots & c \cdot a_{jn} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{"} A + c \cdot \text{j-ty wiersz"}$$

Fakt. Kazda macierz A taka ze $\det A \neq 0$ jest iloczynem macierzy elementarnych.

Wyjaśnienie.

1° Jesli $\det A \neq 0$ to macierz A mozemy za pomoca operacji elementarnych przekszt. do macierzy I.

$$\text{Np } A=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix} \xrightarrow[D_{21}(-1)]{II\to II-I} \overset{D_{21}(-1)\cdot A}{\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}} \xrightarrow[D_{12}(-1)]{I\to I-II} \overset{D_{12}(-1)D_{12}(-1)A}{\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}} \xrightarrow[M_2(\frac{1}{2})]{II\to\frac{1}{2}II} \overset{M_2(\frac{1}{2})\cdot D_{12}(-1)D_{21}(-1)\cdot A}{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}$$

2° Kazda operacja element. jest mnozeniem przez macierz elementarna

Zauwazmy $\cdot$ $M_2(\frac{1}{2})\cdot D_{12}(-1)D_{21}(-1)\,A=I \mid D_{21}^{-1}(-1)D_{12}^{-1}(-1)M_2^{-1}(\frac{1}{2})\cdot$

$$A=D_{21}^{-1}(-1)\cdot D_{12}^{-1}(-1)\,M_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$=D_{21}(+1)\cdot D_{12}(+1)\,M_2(2).$$

A jest iloczynem macierzy elementarnych □

Wniosek. Niech $A,B\in K^{n\times n}$. Wtedy

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

Wyjasnienie. Dla $\det(A),\det(B)\neq 0$

Macierze A i B są iloczynami macierzy elementarnych

Np $A = D_1 \cdot D_2 M_i(2) \cdot T_{k1} I$

Wtedy $\det A$:

$$\det I = 1$$
$$\det(T_{k1} I) = -\det I = -1$$
$$\det(M_i(2) \cdot T_{kl} \cdot I) = 2 \cdot (-1)$$
$$\det(D_2 \cdot M_{i2} T_{kl} I) = 2 \cdot (-1)$$
$$\det(A) = 2 \cdot (-1)$$

Obserwacja: $\det(A) =$ iloczyn parametrów w macierzach M $\cdot (-1)^{\text{liczb. macierzy } T}$

$$B = D \cdot D \cdot M(3) \cdot T\, M(5) \cdot T$$
$$\mathrm{Det}(B) = 3 \cdot 5 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 5$$

$$\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}\Big(\underbrace{DD\,M(2)T}_{(-1)^1 \cdot 2} \cdot \underbrace{DD\,M(3)T\,M(5) \cdot T}_{(-1)^2 \cdot 3 \cdot 5}\Big)$$
$$= \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$$

☐

Wniosek Niech $A \in K^{n \times n}$. Wtedy

1. $\underline{\det(A^n)} = \det(A \cdot A \cdots A) = \det(A) \cdot \det A \cdots \det A = \underline{(\det A)^n}$

2. Macierz A jest odwracalna $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

3. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

D-d 2.

Macierz A jest odwracalna tzn $\exists B : A \cdot B = I$

$$A \cdot B = I \quad \Big| \cdot \det$$
$$\det(A \cdot B) = \det I$$

$$* \quad \det(A) \cdot \det(B) = 1$$

gdyby $\det A = 0$ to równość nie mogłaby zachodzić

Wtedy A nie może być odwracalna.

3. $A \cdot A^{-1} = I$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \quad \Big| : \det(A)$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{-1} \qquad \square$$

- Odwracanie macierzy ze pomocą operacji elementarnych. ELIMINACJI GAUSSA

Aby odwrócić macierz $A \in K^{n \times n}$ wykonujemy jednocześnie na macierzy A oraz macierzy I_n takie same operacje elementarne, tak aby macierz A przekształcić do I_n. Wtedy I_n przekształci się w A^{-1}

Przykład: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow[II \to II - I]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \to I - II} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[II \to \frac{1}{2} II]{}$$

$$\underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{więc} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Uzasadnienie metody

$$\frac{A}{I} \xrightarrow{Op_1} \frac{A_1}{M_1} \xrightarrow{Op_2} \frac{A_2}{M_2} \dots \longrightarrow \frac{I}{A^{-1}}$$

$$\begin{matrix} A & \xrightarrow{E_1} & E_1 A & \longrightarrow & E_2 E_1 \cdot A & \longrightarrow & \dots & \overbrace{E_n \cdots E_2 E_1}^{B} A = I \\ I & & E_1 I & & E_2 E_1 I & & & E_n \cdot E_2 E_1 \cdot I = \underbrace{E_1 \cdots E_2 E_1}_{B} \end{matrix}$$

$$B \cdot A = I$$

$$B = A^{-1}$$

$\square$

- Obliczanie wyznacznika metodą Laplace'a.

Niech $A \in K^{n \times n}$. Przez A_{ij} oznaczamy (i,j)-ty minor A tzn macierz powst z A przez wykreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

$$\text{Np: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \left[\begin{array}{cccc} & & 3 & \\ 1 & 2 & \cancel{3} & \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} & 2 \\ 7 & 8 & \cancel{9} & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

- Ustal $i \in \{1 \dots n\}$
- Rozwinięcie Laplace'a wzgl i-tego wiersza

$$\text{Niech } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \left[(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \right]$
- $\det[a] = a.$

Przykład

1° Dla $n=3$, $i=1$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\cdot\det A_{ij} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j}\cdot\det A_{1j} =$$

$$\det A = a_{11}\cdot\det A_{11} - \underline{a_{12}\cdot\det A_{12}} + \underline{a_{13}\cdot\det A_{13}}$$

$$\det\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1\cdot\det\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = \dots = 0.$$

- Układy równań liniowych:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$$

1° Metoda Eliminacji Gaussa.
(metoda przeciwnych współczynników).

Przykłady:

1° $$\begin{cases} x + y + z = 1 & \\ 2x + 3y + 4z = 3 & II \to II - 2I \\ 2x + 5y + 9z = 11 & III \to III - 2I \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 & \\ 0 + y + 2z = 1 & \longrightarrow \\ 0 + 3y + 7z = 9 & III \to III - 3II \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ z = 6 \end{cases}$$

2° Odczytanie rozwiązań.

- $z = 6$,
- $y + 12 = 1 \longrightarrow y = -11$
- $x + (-11) + 6 = 1 \longrightarrow x = 6$

Przykład 2 Liczba niewiadomych > liczba równań.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

1° Doprowadzenie do układu schodkowego:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 5z = 11 \end{cases} \xrightarrow[\text{II} \to \text{II} - \text{I}]{} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + \underbrace{4z} = 7 \end{cases}$$

2° Odczytanie rozwiązań

Jako parametry wybieramy z.

- $y + 4\underline{\underline{z}} = 7 \longrightarrow y = -4z + 7$
- $x + y + z = 4$

$x + (-4z + 7) + z = 4 \longrightarrow x = 3z - 3$

$$\begin{cases} x = 3z - 3 \\ y = -4z + 7 \\ z \text{ - parametr} \end{cases}$$