KARTKÓWKA 2 luty 13^{15} $(13)^{30}$ – 1h.

Układy równań liniowych.

Obserwacje: układ rów. $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ x-y+7z=2 \end{cases}$

Wektorowo: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{k}_1 x + \bar{k}_2 y + \bar{k}_2 = \bar{c}$

Macierzowo: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot X = B.$

Wzory Cramera – metoda wyznacznikowa

Przykład: $\begin{cases} 1x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$

Macierz główna układu: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & x & y \end{array}$$
$$A_x = \begin{bmatrix} \cancel{1}\,3 & 2 \\ \cancel{4}\,4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = (-3)$, $\det(A_x) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$ $\quad \det(A_y) = -8$

Wtedy $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{7}{-3} = -\dfrac{7}{3}$, $\quad y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{8}{3}$

Metoda Cramera.

Rozważmy u.r.: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots \; a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

n – równań

n – niewiadomych: $x_1 x_2 \dots x_n$

Def. macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dla $i = 1 \ldots n$

A_i powstaje przez zamienienie w macierzy A i-tej kolumny na kolumnę $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Wtedy 1° Jeśli $\det(A) \neq 0$ to układ ma jedno rozwiązanie $(x_1 \ldots x_n)$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

2° Jeśli $\det A = 0$ to

- $\det(A_i) = 0 \rightarrow$ układ ma ∞ wiele rozw.
- $\det(A_i) \neq 0 \rightarrow$ układ nie ma rozwiązań.

• Uzasadnienie metody, dla $n = 3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Wektorowo $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$K_1 \cdot x + K_2 y + K_3 z = B.$$

Wtedy $A = [\overset{x}{K_1} \; \overset{y}{K_2} \; \overset{z}{K_3}]$

$$A_y = [K_1 \; B \; K_3]$$

$$\det A_y = \det[K_1, B, K_3] = \det[K_1,\ K_1 x + K_2 y + K_3 z,\ K_3]$$

$$\overset{Lin}{=} \det[K_1,\ K_1\cdot x,\ K_3] + \det[K_1\ K_2 y\ K_3] + \det[K_1\ K_3 z\ K_3]$$

$$\overset{Lin}{=} x\underbrace{\det[K_1 K_1 K_3]}_{0} + y\underbrace{\det[K_1 K_2 K_3]}_{\det A} + z\underbrace{\det[K_1 K_3 K_3]}_{0}$$

$$\det A_y = y\cdot \det A$$

Więc $$y = \frac{\det A_y}{\det A}. \qquad \square$$

- TW. Kroneckera - Capellego.

Przypomnienie. Niech $A \in K^{n\times m}$, $A = [K_1\ K_2 \dots K_m]$

- Wtedy rzędem A nazywamy liczbę $\operatorname{ord}(A) = \dim(\operatorname{Span}\{K_1, K_2, \dots K_n\})$

Rozważmy:

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

tzn. $$AX = B$$

TW

Układ U ma rozwiązanie $\iff \operatorname{ord}(A|B) = \operatorname{ord}(A)$

D-d: Oznaczmy $A = [K_1\ K_2 \dots K_m]$

$$f(X) = A\cdot X \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Układ $AX = B$ ma rozwiązanie

$\iff \exists X \; f(X) = B$ tzn $B \in \mathrm{Im} f$

$\iff B \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\{K_1\, K_2 \dots K_m\}$

$\iff$

$\mathrm{Span}\{K_1\, K_2 \dots K_m\} = \mathrm{Span}\{K_1\, K_2 \dots K_m, B\}$

$\iff \dim \mathrm{Span}\{K_1 \dots K_m\} = \dim \mathrm{Span}\{K_1 \dots K_m\, B\}$

$\iff \mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(A|B)$

$\square$

• Zbiór Rozwiązań U. R.

I Układy równań jednorodnych.

$$\begin{cases} x + 7y = 0_{//} \\ 2x + 5y = 0_{//} \end{cases}$$

Układ jednorodny to układ postaci

(J) $AX = \mathbb{0}$ $\quad A \in K^{n \cdot m}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Fakt Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest podprzestrzenią liniową K^m.

D-d Rozważmy funkcję $f(X) = A \cdot X : K^m \to K^n$

$\{X \in K^m : AX = \mathbb{0}\} = \{X \in K^m : f(X) = \mathbb{0}\} =$

$= \mathrm{Ker}(f)$

Wiemy że $\mathrm{Ker}(f) \leq K^m$.

Uwaga: Zbiór rozwiązań NIE może być kulą.

II Układ równań niejednorodnych

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 5y = 10 \end{cases} \qquad AX = B.$$

Fakt. Niech X_0 rozwiązanie ukł. $AX = B$.
Wtedy zbiór rozwiązań układu $AX=B$
jest równy:
$$R = \{X_0 + Y : A \cdot Y = 0\} = X_0 + \{Y : AY = 0\}$$
D-d.
Każdy wektor R jest rozwiązaniem $AX=B$:
$$A(X_0+Y) = AX_0 + \underline{AY} = B + 0 = B$$
Niech Z rozwiązanie : $AX = B$
$$Z = X_0 + (Z - X_0)$$
zauważmy $A(Z - X_0) = A \cdot Z - A \cdot X_0 = B - B = 0$
Więc $Z = X_0 + (Z - X_0) \in R$ $\square$

• Wartości i wektory własne macierzy.

Def. Niech $A \in K^{n \times n}$. Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną dla wektora własnego $v \in K^n$, $v \neq 0$, gdy
$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Przykład $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

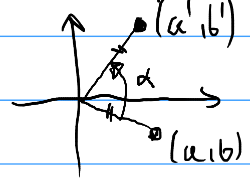
1° Wektor $v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym dla wartości własnej $\lambda = 2$
$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot v$$
wart własna $\lambda = 2$ jej wekt własny $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2° $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ jest wektorem własnym dla wart. własnej $\lambda = 3$.

Macierz bez wektorów własnych.

Macierz obrotu o kąt α wokół środka płaszczyzny.

$$M_\alpha : \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$$



Uwaga: Dla $\alpha \neq k\pi$ M_α nie ma wekt własnych.

bo

$\forall v \in \mathbb{R}^2$ $\overset{\binom{a}{b}}{v}$, $\overset{\binom{a'}{b'}}{M_\alpha \cdot v}$ nie są równoległe.

tzn nie istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ $M_\alpha v = \lambda v$ □

tzn v nie jest wekt własny M_α.

Fakt. Podstawowe własności:

Niech $A \in K^{n \times n}$.

1. Jeśli $\lambda \in K$ wartość własna A

$W_\lambda = \{v : \lambda$ jest wart własną $v\} \leq K^n$

2. Jeśli $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \dots \lambda_m$ parami różne w.w macierzy A

$v_1 \ v_2 \ v_3 \quad v_m$ odpowiadające im wekt własne

to zbiór $\{v_1, v_2 \dots v_m\}$ jest liniowo niezależny.

D-d (1) 1. N $v, w \in W_\lambda$ tzn $Av = \lambda v$ oraz $Aw = \lambda w$

Wtedy $A(v+w) = Av + Aw = \lambda \cdot v + \lambda w = \lambda(v+w)$

więc $v+w \in W_\lambda$.

(2) Niech $k \in K$, $v \in W_\lambda$

Wtedy $A(k \cdot v) = k \cdot A \cdot v = k \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (k \cdot v)$

$k \cdot v \in W_\lambda$

Więc $(1) \wedge (2) \to W_\lambda \leq K^n$ □