Przypomnienie. Niech $A \in K^{n \times n}$. Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną macierzy A gdy istnieje $v \neq \mathbb{0}$ taki że

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

TW. Niech $A \in K^{n \times n}$. Liczba $\lambda \in K$ jest wart. własną A

$\Longleftrightarrow$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0.$$

D-d

Przyp: Macierz M jest odwracalna $\Longleftrightarrow$ $\det M \neq 0$.

Niech $\lambda \in K$. Niech $f(v) = (A - \lambda I) \cdot v$

- λ jest wartością własną A

$\Longleftrightarrow$

$(\exists v \neq \mathbb{0})\ Av = \lambda \cdot v \Longleftrightarrow (\exists v \neq \mathbb{0})\ Av - \lambda v = \mathbb{0}$

$\Longleftrightarrow$

$(\exists v \neq \mathbb{0})\ \mathbb{0} = Av - \lambda v = A \cdot v - \lambda I v = (A - \lambda I) v$

$(A - \lambda I) v = \mathbb{0}$

$\Longleftrightarrow$

Wiemy:
$$\left.\begin{array}{l} f(v) = \mathbb{0} \\ f(\mathbb{0}) = \mathbb{0} \end{array}\right\} f \text{ nie jest } 1\text{-}1$$

$\Longleftrightarrow$

f nie jest odwracalna.

$\Longleftrightarrow$

Macierz f nie jest odwracalna
$(A - \lambda I)$ nie jest odwracalna

$\Longleftrightarrow$

- $\det(A - \lambda I) = 0$ $\square$

Przykład. Wyznaczyć wartości i wekt własne $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Wartości własne:

Tw λ jest wart włas. $\Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0 \qquad \in \mathbb{R}[\lambda] \text{ wielomian.}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Pierwiastki wielomianu ↑ są wartościami własnymi.

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1(-1) = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ozn: Wyrażenie $\det(A - \lambda I)$ nazyw wielomianem charakteryst. A

Wektory własne:

Dla każdej wartości własnej wyliczamy jej wektory własne

Dla $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

wektor własny $v = (x, y)$ spełnia:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\,x \\ x + y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\,y \end{cases}$$

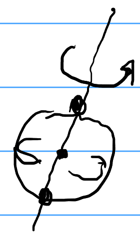
U: Równania są zależne.
Rozwiązania: x - dowolne, $y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x$.

Wektor własny dla λ_1 to $\left(x, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x\right)$. $x \in \mathbb{R}$.
np $\left(1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)$.

Analogicznie
Wektor własny dla $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ to $\left(x, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})x\right)$ $x \in \mathbb{R}$.
np $\left(1, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)$.

- Obrót sfery wokół jej środka.

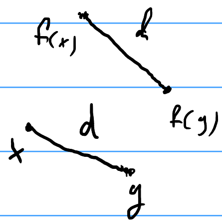
  - Obrót wokół osi przechodzącej przez bieguny



Pytanie: Czy każdy obrót sfery jest obrotem wokół osi???

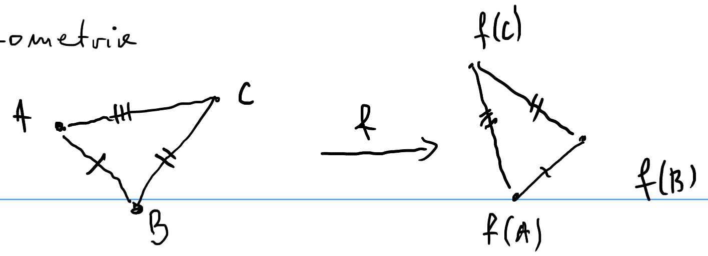
TAK F: Każdy obrót sfery jest obrotem wokół pewnej osi.

Izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
Def. Funkcję $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy izometrią gdy
$(\forall x, y \in \mathbb{R}^3)\ d(x,y) = d(f(x), f(y))$



Obserwacje 1. Izomet zachowuje przystawanie trójkątów.
2. Izometria zachowuje kształty.

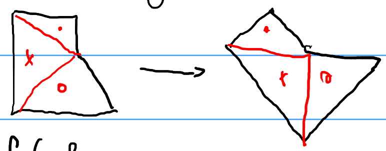
f - izometria



- $d(A,B) = d(f(A), f(B))$
- $d(A,C) = d(f(A)\ f(C))$
-

Trójkąty są przystające bo mają boki o takich samych długościach

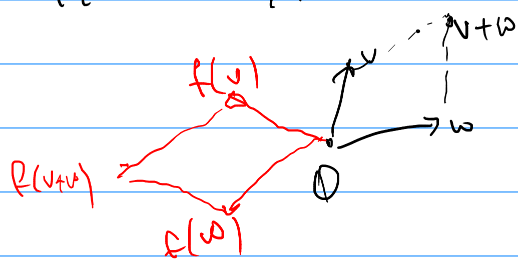
2° Dowolny kształt możemy "przybliżyć" trójkątami



- f(sfera o promieniu r) = (sfera o promieniu r)

Uwaga. Izometria $\mathbb{R}^3$ taka że $f(0) = 0$ jest funkcją liniową.

bo:



$$\begin{cases} 1° & f(v+w) = f(v) + f(w) \\ 2° & f(k\cdot v) = k\cdot f(v) \quad \leftarrow \text{ćw.} \end{cases}$$

f jest liniowe.

- Niech $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dowolna izometria zachowująca 0.
  f jest przekształceniem liniowym.
  Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ macierz f.
  Rozważmy wielomian charakt. A.

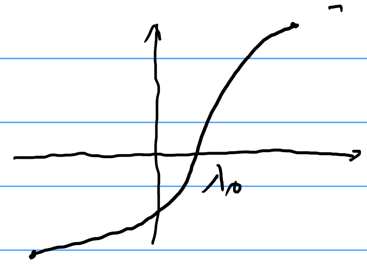
$$h(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathbb{R}[\lambda], \quad \mathrm{st}(h) = 3.$$

Uwaga. Wielomian st 3 ma rzeczywisty pierwiastek

bo $h(x) = ax^3 + \dots \quad a > 0$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$

$\lim_{x\to -\infty} h(x) = -\infty$



Darboux: $\exists \lambda_0 \; h(\lambda_0) = 0$

(*) Założenie $\forall x \in S(0,1) \;\; d(x, f(x)) < 1$

Niech λ_0 pierwiastek $h(\lambda)$
tzn. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ jest wartością własną dla pewnego wektora własnego v_0

$$f(v_0) = A \cdot v_0 = \lambda_0 \cdot v_0$$

$$|v_0| \overset{f \text{ jest izometrią}}{=} |f(v_0)| = |\lambda_0 \cdot v_0| = |\lambda_0| \cdot |v_0|$$

$$|v_0| = |\lambda_0| \cdot |v_0|$$
$$|\lambda_0| = 1$$

$\lambda_0 = -1$, odrzucamy na mocy założenia (*)
$\lambda_0 = 1$, wtedy:
$f(v_0) = \lambda_0 v_0 = v_0$

$f(v_0) = v_0 \qquad v_0 \neq 0 \qquad$ bzo $|v_0| = 1$

Więc istnieje na powierzchni piłki punkt który nie zmieni położenia.

Więc f ma oś obrotu

- Diagonalizacja macierzy

Tw. Niech $A \in K^{n \times n}$, niech $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ wartości własne A oraz $v_1, v_2, \dots v_n$ odpowiadające im liniowo niezależne wektory własne.

Wtedy
$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}^{-1}$$

diagonalizacja macierzy A.

Przykład $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad v_1 = (1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \quad v_2 = (1, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$

F: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1}$

D-d

Przypomnienie: B, E bazy K^n to, $f: K^n \to K^n$ funkcja liniowa

- $A_{fE} = P_{BE} \cdot A_{fB} \cdot P_{BE}^{-1}$

Rozważmy $f(v) = A \cdot v \; : K^n \to K^n$

$E = (e_1, e_2 \dots, e_n)$ baza standardowa

$B = (v_1, v_2 \dots, v_n)$ baza wektorów własnych.

- $A_{fE} = A$!!

$P_{BE} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

- A_{fB}: v_1: $(v_1)_B$ $\quad (f(v_1))_B$:

$v_1 = \underline{1}\, v_1 + \underline{0}\, v_2 + \dots + \underline{0}\, v_n \qquad (v_1)_B = (1, 0, 0 \dots 0)$

$f(v_1) = A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 = \underline{\lambda_1}\, v_1 + 0\, v_2 + \dots + \underline{0}\, v_n .$

$(f(v_1))_B = (\lambda_1, 0, 0 \dots 0)$

Analogicznie $(v_i)_B = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)$

$(f(v_i))_B = (0, 0 \dots, \lambda_i, 0 \dots 0)$

A_{fB}: $(\forall i)\quad A_{fB}(v_i)_B = (f(v_i))_B$

$$(\forall i)\quad A_{fB}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}i = \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_i\\\vdots\\0\end{pmatrix}i$$

Wiec

$$A_{fB} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

wzór →
$$A_{fE} = P_{BE}\cdot A_{fB}\cdot P_{BE}^{-1}$$

Wiec
$$A = \begin{bmatrix}| & | & & |\\ v_1 & v_2 & & v_n\\ | & | & & |\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$\square$