ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 2

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

LICZBY ZESPOLONE

Liczby rzeczywiste reprezentujemy geometrycznie jako prostą. *Liczbami zespolonymi* nazywamy pary liczb rzeczywistych. Tak więc zbiorem wszystkich liczb zespolonych jest kwadrat kartezjański

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, czyli płaszczyzna. Ze wzgledu na jego znaczenie algebraiczne, wykraczające poza zwykłą interpretację geometryczną, wprowadzamy nową nazwę $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Oczywiście powstaje naturalne pytanie: po co nam nowy poszerzony zbiór liczb? W zbiorze liczb rzeczywistych napotykamy na pewne poważne ograniczenia natury algebraicznej. Nie jesteśmy np. w stanie rozwiązać równania

$$x^2 = -1. \tag{1}$$

Chodzi nam m.in. o to, aby w nowym zbiorze to było możliwe. Właściwie ta jedna uwaga pozwoli nam na zdefiniowanie w naturalny sposób działania mnożenia zespolonego uogólniającego mnożenie liczb rzeczywistych.

Ponieważ chcemy, aby nowe liczby w naturalny sposób rozszerzały zbiór liczb rzeczywistych, utożsamiać będziemy pary postaci $(a, 0)$ z poprzednikiem pary, czyli nieco naciągając notację, będziemy zakładali, że $(a, 0)$ to po prostu liczba rzeczywista a. Zdefiniujmy dodawanie liczb zespolonych w najbardziej naturalny sposób:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d). \tag{2}$$

Jeżeli liczbę zespoloną traktować jako wektor o początku w zerze $(0, 0)$ i współrzednych a, b, to dodawanie liczb zespolonych jest po prostu dodawaniem wektorów. Ponieważ dodawanie liczb zespolonych jest dodawaniem wektorów zaczepionych w punkcie $(0, 0)$, więc mnożenie liczby rzeczywistej r przez liczbę zespoloną (a, b) zdefiniujmy także jako mnożenie liczby rzeczywistej przez wektor:

$$\underbrace{(r, 0)}_{r}(a, b) = (ra, rb). \tag{3}$$

Jak powiedzieliśmy, chcemy aby mnożenie zespolone liczb rzeczywistych, a więc liczb postaci $(a, 0)$ było zwykłym mnożeniem rzeczywistym. postulujemy więc, aby

$$\underbrace{(a, 0)}_{a} \cdot \underbrace{(b, 0)}_{b} = \underbrace{(ab, 0)}_{ab}. \tag{4}$$

Dla pełnego zdefiniowania mnożenia liczb zespolonych przypomnijmy, że w dziedzinie zespolonej chcemy mieć rozwiazanie równania (1). Żadna liczba rzeczywista tego równania nie może spełniać, jeśli chcemy, aby mnożenie zespolone na liczbach

rzeczywistych zachowywało się tak jak zwykłe mnożenie tych liczb. Musimy więc wskazać inną liczbę zespoloną z, która będzie miała własność

$$z^2 = -1.$$

Na tym etapie jest to kwestią naszego wyboru. Wybierzmy więc, aby ułatwić sobie życie, najprostszą możliwą liczbę nierzeczywistą: $(0,1)$. Oznaczmy ją $(0,1) = i$ (od *imaginary*) i nazwijmy *jednostką urojoną*. Naszym więc zasadniczym postulatem, który już, razem z poprzednimi wymaganiami stawianymi przez nas mnożeniu, pozwoli zobaczyć jak powinno wyglądać mnożenie liczb zespolonych jest:

$$(0,1)\cdot(0,1) = \underbrace{(-1,0)}_{-1}. \tag{5}$$

Zakładając, że mnożenie ma być łączne, rozdzielne względem dodawania, oraz zawsze mają zachodzić równości (2),(3), (4) oraz równość (5), **musimy mieć**:

$$(a,b)\cdot(c,d) = \underbrace{((a,0)+(0,b))}_{(a,b)}\cdot\underbrace{((c,0)+(0,d))}_{(c,d)} =$$

$$(a,0)\cdot(c,0)+(a,0)\cdot(0,d)+(0,b)\cdot(c,0)+(0,b)\cdot(0,d) =$$

$$(ac,0)+(0,ad)+(c,0)\cdot(0,b)+\underbrace{(b,0)\cdot(0,1)}_{(0,b)}\cdot\underbrace{(d,0)\cdot(0,1)}_{(0,d)} =$$

$$(ac,0)+(0,ad)+(0,cb)+(b,0)\cdot(d,0)\cdot(0,1)\cdot(0,1) =$$

$$(ac,0)+(0,ad)+(0,cb)+(bd,0)\cdot(-1,0) =$$

$$(ac,0)+(0,ad)+(0,cb)+(-bd,0) =$$

$$(ac-bd, ad+bc).$$

Tak więc jeśli nasze wymagania co do mnożenia liczb zespolonych mają być spełnione, mnozenie to **musi** być zdefiniowane w sposób następujący:

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc). \tag{6}$$

Zadanie 1. Pokazać, posługując się definicją mnożenia zespolonego (6), że mnożenie jest łączne, tzn.

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$$

dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3.

Zadanie 2. Posługując sie definicjami dodawania zespolonego (2) i mnożenia zespolonego (6) pokazać, że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3$$

dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3.

Zadanie 3. Pokazać, że jedynka $(1,0)$ jest elementem neutralnym dla mnożenia liczb zespolonych, tzn.

$$z\cdot(1,0) = (1,0)\cdot z = z$$

dla dowolnej liczby zespolonej z. Co jest elementem neutralnym dla dodawania liczb zespolonych?

Zamiast używać mało wygodnej notacji liczb zespolonych w postaci par, stosujemy raczej notację algebraiczną przedtawiajac parę (a, b) w postaci

$$(a, b) = a + bi,$$

gdzie liczby rzeczywiste a, b piszemy w zwykłej dla nich postaci, natomiast jednostkę zespoloną $(0, 1)$ zapisujemy jako reprezentujący ją symbol 'i'. Działania na tych liczbach wykonujemy w takim sam sposób jak na liczbach rzeczywistych, pamiętając, że $i \cdot i = -1$. Tak więc:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac+(ad+bc)i+bd(-1) = ac-bd+(ad+bc)i,$$

co oczywiście daje nam znany już wzór na mnożenie liczb zespolonych. Zauważmy, że dla liczb zespolonych zachodzą znane nam z dziedziny rzeczywistej wzory skróconego mnożenia:

$$(z_1 + z + 2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2;$$

$$(z_1 + z_2) \cdot (z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2;$$

itp. (ich wyprowadzenie w dziedzinie zespolonej jest identyczne z wyprowadzeniem tych wzorów dla liczb rzeczywistych).

Zadanie 4. Wykonać mnożenia: a) $(1 + i)(1 + 2i) =$
b) $(3 - i)(2 + i) =$
c) $(a + bi)^2 =$
d) $i^4 =$
e) $(i + 1)^4 =$

Liczbą *sprzężoną* do liczby zespolonej $z = a+bi$ nazywamy liczbę postaci $\overline{z} = a-bi$. Na płaszczyźnie jest to odbicie liczby z wzgledem osi poziomej czyli osi rzeczywistej (oś pionową nazywamy *osią urojoną*).

Modułem liczby zespolonej $z = a^2+b^2$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zadanie 5. Zauważyć, że jeśli liczba zespolona jest liczbą rzeczywistą, to jej moduł jest jej wartością bezwzględną. Zatem pojęcie modułu rozszerza pojecie wartosci bezwzględnej. Jaka jest geometryczna interpretacja modułu liczby zespolonej $a + bi = (a, b)$? Jaki zbiór na płaszczyźnie tworzą wszystkie liczby zespolone o tym samym module $r > 0$?

Zadanie 6. Pokazać, że $z\overline{z} = |z|^2$.

Zauważmy teraz, że liczby zespolone możemy dzielić przez siebie o ile mianownik jest różny od zera. Niech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + d_i \neq 0$. Jeśli mają być zachowane własności algebraiczne znane z dziedziny rzeczywistej, to:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Zadanie 7. Pokazać, że wykonane przez nas powyżej działanie jest istotnie dzieleniem, tzn. że

$$z_2 \cdot \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i \right) = z_1.$$

Zadanie 8. Wykonać dzielenia: a) $\frac{1+i}{1-i} =$
b) $\frac{i}{1+2i} =$
c) $\frac{2-i}{3+2i} =$
d) $\frac{2-3i}{(1+i)^2} =$
e) $(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} =$