ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 4

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

WIELOMIANY

Wielomianem w dziedzinie zespolonej nazywamy każdą funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ postaci

$$w(z) = a_n z_n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy *współczynnikami wielomianu* $w(z)$. Jeśli $n > 0$ i w powyższym wielomianie $w(z)$ $a_n \neq 0$, to n nazywamy stopniem wielomianu $w(z)$. Jeśli wielomian składa się tylko z jednego składnika a_0, to stopniem tego wielomianu jest zero. Stopień wielomianu $w(z)$ oznaczamy przez $deg(w(z))$ *Wielomianem zerowym* nazywamy wielomian $w(z) = 0$, inaczej mówiąc, wielomian stopnia zero, gdzie $a_0 = 0$. *Pierwiastkiem* wielomianu $w(z)$ nazywamy taką liczbę z_0, że

$$w(z_0) = 0.$$

Jak wiadomo, w dziedzinie rzeczywistej nie wszystkie wielomiany stopnia większego od 1 mają pierwiastki. Mówiliśmy już o tym, omawiając istnienie rozwiązań równań kwadratowych stopnia 2. Przykładem wielomianu rzeczywistego stopnia 2 nie mającego pierwiastka w dziedzinie rzeczywistej jest wielomian $x^2 + 1$. Wiemy już, że wielomian ten posiada dwa pierwiastki w dziedzinie zespolonej: i oraz $-i$. Prawdziwe jest nastepujące dużo silniejsze twierdzenie zwane podstawowym twierdzeniem algebry.

Twierdzenie 3 (Podstawowe twierdzenie algebry) (Gauss). Każdy wielomian w dziedzinie zespolonej stopnia większego od zera ma pierwiastek.

Dowód, który wymaga nieco więcej wiadomości na temat analizy na liczbach zespolonych, pomijamy.

Udowodnimy twierdzenie łączące rozkład wielomianu na czynniki z istnieniem pierwiastków. Zaczniemy od następujacego lematu

Lemat. Dla dowolnych dwóch liczb zespolonych zachodzi tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \tag{1}$$

Dowód. wykonajmy mnożenie po prawej stronie (1):

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^3 b^{n-3} + a^2 b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - a^2 b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n =$$

$$a^n - b^n.$$

$\square$

Twierdzenie 4. Liczba z_0 jest pierwiastkiem wielomianu

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $w(z)$ możemy zapisać jako

$$w(z) = (z - z_0)u(z),$$

gdzie $u(z)$ jest pewnym wielomianem stopnia $n - 1$.

Dowód. Dowód jednej implikacji z tezy twierdzenia jest trywialny. Mianowicie, jeśli $w(z) = (z - z_0)u(z)$, to oczywiscie

$$w(z_0) = (z - z_0)u(z_0) = 0.$$

Załóżmy teraz, że z_0 jest pierwiastkiem wielomianu $w(z)$, tzn.

$$w(z_0) = 0.$$

Mamy wtedy, korzystając z powyższego lematu,

$$w(z) = w(z) - w(z_0) =$$

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) - (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0) =$$

$$a_n(z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \ldots + a_2(z^2 - z_0^2) + a_1(z - z_0) =$$

$$(z - z_0)\underbrace{a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1})}_{P_{n-1}(x)} +$$

$$(z - z_0)\underbrace{a_{n-1}(z^{n-2} + z^{n-3}z_0 + \ldots + zz_0^{n-3} + z_0^{n-2})}_{P_{n-2}(x)} +$$

$$\vdots$$

$$(z - z_0)\underbrace{a_2(z + z_0)}_{P_1(z)} +$$

$$(z - z_0) \cdot \underbrace{a_1}_{P_0(z)} =$$

$$= (z - z_0)(P_{n-1}(z) + P_{n-2}(z) + \ldots + P_1(z) + P_0(z)).$$

Oczywiście

$$P_{n-1}(z) + P_{n-2}(z) + \ldots + P_1(z) + P_0(z)$$

jest wielomianem stopnia $n - 1$ i, przyjmując

$$u(z) = P_{n-1}(z) + P_{n-2}(z) + \ldots + P_1(z) + P_0(z),$$

dostajemy ostatecznie

$$w(z) = (z - z_0)u(z).$$

□

Twierdzenie 5. Każdy wielomian

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

stopnia $n > 0$ w dziedzinie zespolonej można zapisać jako iloczyn n czynników liniowych postaci $z - \alpha_i$ i stałej a_n:

$$w(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_n).$$

Oczywiście α_i są pierwiastkami wielomianu $w(z)$ (uwaga: niekoniecznie różnymi). Co więcej, z dokładnością do kolejności czynników to przedstawienie wielomianu $w(z)$ jest jedyne.

Dowód. Z podstawowego twierdzenia algebry (tw. 3) wiemy, że $w(z)$ posiada pierwiastek. Nazwijmy ten pierwiastek α_1. Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że $w(z)$ jest iloczynem

$$w(z) = (z - \alpha_1)u_{n-1}(z),$$

gdzie $u_{n-1}(z)$ jest wielomianem stopnia $n-1$. Niech

$$u_{n-1}(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2}z_{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Po pomnożeniu tego wielomianu przez $z - \alpha_1$ dostaniemy wielomian o współczynniku b_{n-1} przy z^n. Stąd $b_{n-1} = a_n$.

Następnie, tak jak to agumentowaliśmy dla $w(z)$, przedstawiamy $u_{n-1}(z)$ w postaci

$$u_{n-1}(z) = (z - \alpha_2)u_{n-2}(z)$$

gdzie $u_{n-2}(z)$ jest wielomianem stopnia $n-2$ ze współczynnikiem a_n przy z^{n-2}. Zatem

$$w(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)u_{n-2}(z).$$

Postepując tak dalej, ostatecznie uzyskujemy

$$w(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_2)a_n$$

(w ostatnim kroku wielomian $u_1(z)$ rozkładamy na czynniki $u_1(z) = (z - \alpha_n)u_0(z)$, gdzie wielomian $u_0(z)$ jest wielomianem stopnia zero o współczynniku a_n przy $z^0 = 1$, a zatem $u_0(z) = a_n$).

Jeśli istniałyby dwa różne przedstawienia wielomianu $w(z)$ w postaci iloczynu czynników liniowych, to oznaczając przez $A(Z)$ część wspólną tych przedstawień, czyli iloczyn czynników liniowych wystepujących w obu przedstawieniach, mielibyśmy

$$w(z) = A(z)B(z) = A(z)C(z),$$

gdzie $B(z)$ i $C(z)$ byłyby różnymi wielomianami dodatniego stopnia. Zatem wielomian $B(z) - C(z)$ byłby niezerowym wielomianem i

$$0 = w(z) - w(z) = A(z)B(z) - A(z)C(z) = A(z)(B(z) - C(z))$$

też byłby wielomianem niezerowym, co jest oczywistą sprzecznością.

□

Dwa kolejne twierdzenia dotyczą wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Bedziemy korzystali z następujących własności sprzężenia:
addytywność

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$

multyplikatywność:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$

a także:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

Zadanie 1. Przypomnieć dowody powyższych własności sprzężenia.

Twierdzenie 6. Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, gdzie wszystkie współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi. Wtedy jeśli α jest pierwiastkiem tego wielomianu, to także $\overline{\alpha}$ jest jego pierwiastkiem.

Dowód. Ponieważ $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, więc $\overline{a_i} = a_i$. Mamy

$$\begin{gathered} w(\overline{\alpha}) = a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1} \overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \\ a_n \overline{\alpha^n} + a_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = \\ \overline{a_n} \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = \\ \overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = \\ \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0} = \\ \overline{w(\alpha)} = \overline{0} = 0. \end{gathered}$$

□

Wykorzystamy to twierdzenie w dowodzie kolejnego twierdzenia będącego odpowiednikiem dla dziedziny rzeczywistej twierdzenia o rozkładzie wielomianu zespolonego na czynniki liniowe.

Bedzie nam potrzebny jeszcze następujący fakt, który sformułujemy jako zadanie.

Zadanie 2. Jeśli $w(z) = u(z)v(z)$ i $w(z)$ oraz $u(z)$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, to $v(z)$ też musi być wielomianem o współczynnikach rzeczywistych.

Twierdzenie 7. Każdy wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić jako iloczyn wielomianów liniowych postaci $x - \alpha$, gdzie α są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $w(x)$, pewnych nierozkładalnych wielomianów kwadratowych postaci $x^2 + \beta x + \gamma$, gdzie β, γ sa liczbami rzeczywistymi, oraz stałej a_n. Co więcej, z dokładnością do kolejności czynników to przedstawienie wielomianu $w(x)$ jest jedyne.

Dowód. Rozważmy wielomian $w(z)$ w dziedzinie zespolonej. Niech α_1 będzie pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $w(z)$. Wtedy (twierdzenie 4)

$$w(z) = (z - \alpha_1) u_1(z)$$

dla pewnego wielomianu o stopniu o jeden mniejszym niż wielomian $w(z)$. Z zadania 2 wiemy, że wielomian $u_1(z)$ ma współczynniki rzeczywiste. Jeśli wielomian $u_1(z)$ ma pierwiastek rzeczywisty α_2, to postępujemy jak wyżej, rozkładając tym razem wielomian $u_1(z)$ na iloczyn wielomianów $(z - \alpha_2) u_2(z)$, gdzie $u_2(z)$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste. Postępujemy tak dalej, aż otrzymamy pewien rozkład

$$w(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_k) u_k(z),$$

gdzie $u_k(z)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i nie ma już pierwiastków rzeczywistych. Jeśli jest stopnia zero, to musi to być stała a_n, aby współczynniki przy najwyższej potędze w wielomianach po obu stronach powyższej równości były identyczne. To oczywiście kończy dowód w tym przypadku. Załózmy

więc, że stopień wielomianu $u_k(z)$ jest większy od zera. Wtedy w dziedzinie zespolonej u_k ma pierwiastek ξ. Z twierdzenia 6 wiemy, że wtedy także $\overline{\xi}$ jest pierwiastkiem wielomianu $u_k(z)$. Powtarzając dwa razy użytą wyzej procedurę wyłączania z wielomianu czynników liniowych, dostajemy rozkład wielomianu $u_k(z)$ na iloczyn

$$u_k(z) = (z - \xi)(z - \overline{\xi})u_{k+1}(z).$$

Zadanie 3. Teraz zauważmy, że wielomian $(z - \xi)(z - \overline{\xi})$ ma współczynniki rzeczywiste (jest to więc wielomian nierozkładalny postaci $x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $\beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$).

Zatem z faktu z zadania 2 wiemy, że także wielomian $u_{k+1}(z)$ musi mieć współczynniki rzeczywiste. Proces ten kontynuujemy, aż w kolejnym rozkładzie dostaniemy wielomian $u_{k+m}(z)$ o stopniu zero, czyli

$$w(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ldots(z - \alpha_k)(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\ldots(x^2 + \beta_m x + \gamma_m)u_{k+m}(z).$$

Wtedy, aby współczynniki przy najwyższych potegach były identyczne, $u_{k+m}(z) = a_n$.

Dowód jedyności takiego przedstawienia jest analogiczny jak w dowodzie twierdzenia 5.

□

Liczby naturalne możemy dodawać i mnożyć, otrzymując w wyniku tych operacji także liczby naturalne. Podobnie wielomiany można dodawać i mnożyć, otrzymując w wyniku tych operacji także wielomiany. Przy dzieleniu liczb naturalnych przez siebie ogólnie dostajemy liczbę wymierną, nie zawsze całkowitą. Mianowicie dla każdych dwóch liczb naturalnych n, m, gdzie $m \neq 0$

$$n = km + r,$$

gdzie k, r są liczbami naturalnymi oraz $0 \leqslant r < m$ (r - reszta z dzielenia n przez m). Podobnie rzecz się ma dla wielomianów. Mianowicie, jeśli $w(z)$ i $v(z)$ są wielomianami w dziedzinie zespolonej, to dla pewnych jednoznacznie określonych wielomianów $u(z)$ i $r(z)$, gdzie żądamy, aby $deg(r(z)) < deg(v(z))$, zachodzi równość

$$w(z) = u(z)v(z) + r(z).$$

Oczywiście, gdy $m < n$ wystarczy przyjąć $u(z) = 0$ i $r(z) = w(z)$.

Zachodzenie tego wzoru i dobór wielomianów $u(z)$ i $r(z)$ wynikają z algorytmu dzielenia wielomianów, który teraz omówimy. Niech

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

i niech

$$v(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1}z^{m-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$. Załóżmy także, że $n \geqslant m$.

Pomnóżmy wielomian $v(z)$ przez $P_{n-m}(z) = z^{n-m}a_n/\alpha_m$. W wyniku tego mnożenia dostajemy wielomian

$$P_{n-m}(z)v(z) = a_n z^n + \frac{\alpha_{m-1}a_n}{\alpha_m}z^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_1 a_n}{\alpha_m}z^{n-m+1} + \frac{\alpha_0 a_n}{\alpha_m}z^{n-m}.$$

Zauważmy teraz, że **odejmując** wielomian $P_{n-m}(z)v(z)$ od wielomianu $w(z)$, dostaniemy wielomian stopnia nie wiekszego niż $n-1$ (bo składnik $a_n z^n$ się redukuje).

Oznaczmy współczynniki tego wielomianu przez b_i:

$$w(z) - P_{n-m}(z)v(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

(Oczywiście może się zdarzyć, że $b_{n-1} = 0$, co będzie prowadzić do "pustego" kroku w algorytmie; co jednak nie koliduje z ogólnym opisem algorytmu). **Pomnóżmy** wielomian $v(z)$ przez $P_{n-m-1}(z) = z^{n-m-1}b_{n-1}/\alpha_m$. W wyniku tego mnożenia dostajemy wielomian

$$P_{n-m-1}(z)v(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \frac{\alpha_{m-1}b_{n-1}}{\alpha_m}z^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_1 b_{n-1}}{\alpha_m}z^{n-m} + \frac{\alpha_0 b_{m-1}}{\alpha_m}z^{n-m-1}.$$

Zauważmy teraz, że **odejmując** wielomian $P_{n-m-1}(z)v(z)$ od wielomianu $w(z) - P_{n-m}(z)v(z)$, dostaniemy wielomian stopnia nie wiekszego niż $n-2$:

$$w(z) - P_{n-m}(z)v(z) - P_{n-m-1}(z)v(z) = c_{n-2}z^{n-2} + c_{n-3}z^{n-3} + \ldots + c_1 z + c_0$$

(Oczywiście może się zdarzyć, że $c_{n-2} = 0$, co będzie prowadzić do "pustego" kroku w algorytmie; to jednak nie koliduje z ogólnym opisem algorytmu).

$\vdots$

Postępujemy tak dalej, aż ostatecznie uzyskamy w wyniku kolejnych odejmowań wielomian

$$r(z) := w(z) - P_{n-m}(z)v(z) - P_{n-m-1}(z)v(z) - \ldots - P_0 v(z)$$

stopnia mniejszego niż m. Przyjmując

$$u(z) = P_{n-m}(z) + P_{n-m-1}(z) + \ldots + P_0,$$

dostajemy ostatecznie

$$w(z) = v(z)u(z) + r(z).$$

Wielomian $r(z)$ nazywamy *resztą z dzielenia wielomianu* $w(z)$ *przez wielomian* $v(z)$. Jeśli $r(z) = 0$, to mówimy, że *wielomian* $w(z)$ *jest podzielny przez wielomian* $v(z)$ lub, że *wielomian* $v(z)$ *dzieli wielomian* $w(z)$.

Prześledźmy teraz działanie powyższego algorytmu na przykładzie.

Przykład. Podzielmy wielomian $w(z) = z^5 - 3z^3 + z^2 - 4$ przez wielomian $v(z) = z^2 - 2$.

$$\begin{array}{l}
z^5 + 0z^4 + 3z^3 + z^2 + 0x - 4 : z^2 - 2 = z^3 + 5z + 1 \\
z^5 \qquad\quad - 2z^3 \\
\hline
\qquad\quad 5z^3 + z^2 + 0z - 4 \\
\qquad\quad 5z^3 \qquad - 10z \\
\hline
\qquad\qquad\quad z^2 + 10z - 4 \\
\qquad\qquad\quad z^2 \qquad\quad - 2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 10z - 2
\end{array}$$

W powyższej operacji mamy: $P_3(z) = z^3$, $P_2(z) = 0$, $P_1(z) = 5z$, $P_0(z) = 1$, $u(z) = z^3 + 5z + 1$ i $r(z) = 10z - 2$.

Zadanie 4. Wykonać następujące dzielenia wielomianów:
a) $2z^6 - 2 : z^3$;
b) $iz^5 - z^4 + iz^3 - 2z^2 + (1+i)z - 2 : iz^2 - 4$;
c) $z^4 - 6z - 2i : z^2 - 2$;
d) $z^5 - z^2 : z - 1$.

Zadanie 5. Niech $a \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pewnego wielomianu $v(z)$. Pokazać, że jeśli $w(z)$ jest wielomianem w dziedzinie zespolonej i $r(z)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $w(z)$ przez wielomian $v(z)$, to $w(a) = r(a)$. Co można powiedzieć o $r(z)$, gdy $r(z)$ jest resztą z dzielenia $w(z)$ przez $z - a$?

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $w(z) = z^3 + 2z^2 - 3$. Wsk.: jeden pierwiastek łatwo odgadnąć.

Zadanie 7. Dlaczego wielomian n-tego stopnia nie może mieć więcej niż n pierwiastków?

Zadanie 8. Udowodnić, że jeśli wielomian $w(z)$ ma pierwiaski zespolone α i $\overline{\alpha}$ i pozostałe same pierwiastki rzeczywiste, to istnieje stała zespolona c, taka, że wielomian $cw(z)$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste.

Zadanie 9. Pokazać, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych musi mieć przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 10. Pokazać, że jeśli $w(z)$ i $v(z)$ są wielomianami, to przedstawienie $w(z) = u(z)v(z) + r(z)$, gdzie $deg(r(z)) < deg(v(z))$, jest jednoznaczne (chodzi o jednoznaczność doboru wielomianów $u(z)$ i $r(z)$).