**ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ**

**WYKŁAD 6**

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

MACIERZE

*Macierzą* rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $mn$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w $m$ wierszach i $n$ kolumnach. Bardziej formalnie: jest to funkcja ze z produktu kartezjańskiego $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ w zbiór liczb rzeczywistych (zespolonych): $a : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ ($a : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$). Wartość $a(i, j) = a_{i,j}$ to element tablicy leżący w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie. Taką macierz zapisujemy w formie $[a_{i,j}]_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$, lub, jeśli liczba kolumn i wierszy jest znana, po prostu jako $[a_{i,j}]$.

Podane poniżej macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2i \\ -1+3i \end{bmatrix}$$

mają odpowiednio wymiary $3 \times 3$, $3 \times 1$, $2 \times 2$. Macierz $A$ jest rzeczywista, macierz $B$ jest zespolona.

*Macierzą zerową* wymiaru $m \times n$, nazywamy macierz tego wymiaru, której wszystkie elementy są równe 0.

$$\mathbf{0} = \mathbf{0_{m \times n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

*Macierzą kwadratową wymiaru* $n \times n$ nazywamy macierz której liczba wierszy i liczba kolumn wynoszą $n$. Elementy macierzy, które mają ten sam numer wierszy co kolumny, tworzą *główną przekątną* macierzy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*Macierz trójkątna dolna* to macierz kwadratowa stopnia $n \ge 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Analogicznie określamy *macierz trójkątną górną*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*Macierz diagonalna* to macierz kwadratowa stopnia $n$, w której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalną stopnia $n$, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy *macierzą jednostkową*.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Zdefiniujemy teraz podstawowe działania na macierzach.

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy $A$ i $B$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, której elementy są określone wzorem

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$, czyli $C = A \pm B$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1. Obliczyć sumę i różnicę podanych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Określimy teraz operację mnożenia macierzy przez liczbę. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech $\alpha$ będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. *Iloczynem macierzy $A$ przez liczbę $\alpha$* nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, której elementy są określone wzorem

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$, czyli $B = \alpha A$:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Obliczyć iloczyny podanych macierzy i liczb:

$$a)\ \alpha = \tfrac{3}{4},\ A = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -24 \\ -8 & 12 & -12 \\ 16 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b)\ \alpha = 1 - i,\ B = \begin{bmatrix} i & 0 & 3+2i & 5 \\ 1+i & 2 & -3i & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Twoerdzenie 10.** Niech $A, B, C$ bedą dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego samego wymiaru oraz niech $\alpha, \beta$ bedą liczbami rzeczywistymi (zespolonymi). Wtedy

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + 0 = 0 + A = A$;
4. $A + (-A) = 0$;
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7. $1 \cdot A = A$;
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Zadanie 3. Udowodnić wszystkie punkty z powyższego twierdzenia.

Zadanie 4 Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) obliczyć $5(A + 2B) + 4(2A - B)$.

b) Rozwiązać równanie macierzowe $3(A + X) + 5(3X + B) = A - B$:

Zdefiniujemy teraz iloczyn macierzy.

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ i $B = [b_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times k$. *iloczynem macierzy $A$ i $B$* nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy są określone wzorem

$$c_{ij} = a_{i1} \pm b_{1j} + a_{i2} \pm b_{2j} + \ldots + a_{in} \pm b_{nj}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq k$, (piszemy $C = A \cdot B = AB$).

Przykład. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ mamy}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + -2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Przykład. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ mamy}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-5) \\ 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -11 \\ -3 & 5 \\ -13 & 23 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Dla macierzy

$A = \begin{bmatrix} i & i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ obliczyć ich iloczyn $AB$.

Nastepujące twierdzenie orzeka o podstawowych własnosciach iloczynu macierzy

**Twierdzenie 11.**

1. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$, a macierze $B$ i $C$ wymiar $n \times k$. Wówczas
$$A(B + C) = AB + AC.$$

2. Niech macierze $A$ i $B$ mają wymiar $m \times n$, a macierz $C$ wymiar $n \times k$. Wówczas
$$(A + B)C = AC + BC.$$

3. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B$ wymiar $n \times k$ oraz $\alpha$ będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wówczas
$$A(\alpha B) = (\alpha A)B.$$

4. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$, macierz $B$ wymiar $n \times k$ oraz macierz $C$ wymiar $k \times l$. Wówczas
$$(AB)C = A(BC).$$

5. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$. Wówczas

$$I_m A = A I_n = A.$$

Zadanie 6. Udowodnić wszystkie punktu powyższego twierdzenia. Wsk.: Aby udowodnić równość macierzy $[a_{i,j}]$ i $[b_{i,j}]$ o tym samym rozmiarze $m \times n$, wystarczy pokazać, że $a_{i,j} = b_{i,j}$ dla kazdej pary liczb $i, j$ gdzie $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

Zadanie 7. Znaleźć macierze $A \neq 0$ i $B \neq 0$ rozmiaru $2 \times 2$ takie, aby $AB = 0$.

Przykład. Rozwiążemy następujące równanie macierzowe:

$$X \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 15 & -12 \end{bmatrix}.$$

Powyższe równanie jest rownoważne równaniu (dlaczego?):

$$2X - 5X = -3X = 3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zatem $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

Przykład. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Wyprowadzimy wzór na $A^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Najpierw obliczymy $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Analogicznie:

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd wnioskujemy, że $A^n = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Trzeba to jeszcze udowodnić indukcyjnie. Pierwszy krok indukcyjny już jest zrobiony, bo dla $n = 1$ hipoteza jest prawdziwa. Teraz udowodnimy zachodzenie implikacji: $T(n) \Rightarrow T(n+1)$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^n \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

co należało dowieść. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej i przeprowadzonego rozumowania, wzór zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n$.

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$. *Macierzą transponowaną* do macierzy $A$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy określone sąwzorem:

$$b_{ij} = a_{ji},$$

gdzie $1 \leq i \leq n$ oraz $1 \leq j \leq m$. Macierz transponowaną do macierzy $A$ oznaczamy przez $A^T$.

Zadanie 8. Dla macierzy z zadania 1 znaleźć macierze do nich transponowane.

**Twierdzenie 12.**

1. Niech macierz $A$ i $B$ mają wymiar $m \times n$. Wówczas

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

2. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$ oraz $\alpha$ będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wówczas

$$(A^T)^T = A \quad \text{oraz} \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

3. Niech macierz $A$ ma wymiar $m \times n$, macierz $B$ wymiar $n \times k$. Wówczas

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

4. Niech $A$ będzie macierzą kwadratową oraz niech $r \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$(A^r)^T = (A^T)^r.$$

Zadanie 9. Udowodnić wszystkie punkty twierdzenia 12.

Macierz kwadratowa $A$ jest *symetryczna*, gdy

$$A^T = A.$$

Macierz kwadratowa $A$ jest *antysymetryczna* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^T = -A.$$

Z powyższej definicji wynika, że macierz jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są sobie równe. Natomiast macierz jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej różnią się tylko znakiem, a elementy głównej przekątnej są równe 0.

Przykład macierzy symetrycznej: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Przykład macierzy antysymetrycznej: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10. Czy iloczyn macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną?