ALGEBRA 2

WYKŁAD 1

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

PRZESTRZEŃ LINIOWA, NIEZALEŻNOŚĆ WEKTORÓW, BAZA

Przestrzenią liniową (mówimy też: *wektorową*) nad ciałem skalarów $\mathcal{K}$ (u nas zawsze $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, tzn. skalarami będą zawsze bądź wszystkie liczby rzeczywiste bądź wszystkie liczby zespolone) nazywamy tzw. *zbiór wektorów*, oznaczmy go $\boldsymbol{V}$, z działaniem dodawania wektorów $\oplus$, jeśli spełnione są nastepujące warunki:

1) $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \oplus \boldsymbol{v}$, dla dowolnych $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ (przemienność dodawania wektorów);

2) $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$, dla dowolnych $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ (łączność dodawania wektorów);

3) istnieje wektor $\mathbf{0}$ (tzw. *wektor zerowy*) taki, że $\boldsymbol{u} \oplus \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$, dla każdego wektora $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$;

4) dla każdego wektora $\boldsymbol{u}$ istnieje wektor $-\boldsymbol{u}$ taki, że $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$;

(Własności 1)-4) okreslalają strukturę $(\boldsymbol{V}, \oplus)$, tzn. zbioru wektorów z operacją ich dodawania. W algebrze zbiór z działaniem o takich własnościach nazywa sie *grupą* (własności 2)-4)) przemienną, czy też abelową (własność 1)); kolejne własności łączą dodawanie wektorów z kolejną operacją, mianowicie mnożeniem $\odot$ wektorów przez skalar.)

5) $\alpha \odot (\beta \odot \boldsymbol{u}) = (\alpha\beta) \odot \boldsymbol{u}$, dla wszystkich skalarów $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ i wektorów $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$;

6) $\alpha \odot (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = \alpha \odot \boldsymbol{u} \oplus \alpha \odot \boldsymbol{v}$ dla wszystkich skalarów $\alpha, \in \mathcal{K}$ i wektorów $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ (rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania wektorów);

7) $(\alpha + \beta) \oplus \boldsymbol{u} = \alpha \odot \boldsymbol{v} \oplus \beta \odot \boldsymbol{u}$ dla wszystkich skalarów $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ i wektorów $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ (rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania skalarów);

8) $1 \odot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ dla kazdego wektora $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$.

Poniższe fakty zawarte w kolejnych zadaniach pokazują, że intuicje i oczekiwania co do własności operacji określających przestrzeń liniową sa istotnie spełnione przy takiej definicji przestrzeni liniowej.

Zadanie 1. Pokazać, że istnieje tylko jeden wektor zerowy.

Zadanie 2. Pokazać, że dla danego wektora $\boldsymbol{u}$ istnieje tylko jeden wektor $-\boldsymbol{u}$ do niego przeciwny.

Zadanie 3. Pokazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{u}$ zachodzi równość $0 \odot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Zadanie 4. Pokazać, że dla każdego skalara α zachodzi równość $\alpha \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Zadanie 5. Pokazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{u}$ zachodzi równość $(-1) \odot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$.

UWAGA!!!. Dalej zamiast oznaczać dodawanie wektorów przez $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$ będziemy po prostu pisać $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, a także zamiast oznaczać mnożenie wektora przez skalar przez $\alpha \odot \boldsymbol{u}$ będziemy po prostu pisać $\alpha\boldsymbol{u}$. Nie będzie to prowadzić do niejasności, gdyż znaczenie operacji dodawania (to czy dodajemy wektory czy skalary) oraz mnożenia (to czy mnożymy wektor przez skalar czy dwa skalary) bedzie zawsze jasne z kontekstu, m.in. dlatego, że wektory oznaczamy pogrubioną czcionką.

Podamy teraz kilka przykładów przestrzeni liniowych.

Przykład 1. $\boldsymbol{v} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. (płaszczyzna). Dodawanie wektorów definiujemy w sposób następujacy:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Mnożenie wektora przez skalar definiujemy w sposób nastepujacy:

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 2 (ten przykład uogólnia poprzedni). $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. (n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista). Dodawanie wektorów definiujemy w sposób następujacy:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Mnożenie wektora przez skalar definiujemy w sposób nastepujacy:

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 3. $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}$. (n-wymiarowa przestrzeń zespolona). Dodawanie i mnożenie przez skalar definiujemy analogicznie do definicji w przykładzie 2.

Przykład 4. $\boldsymbol{V} = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ jest funkcją ciągłą}\}$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ (przestrzeń rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$). Wektorami są tu więc funkcje. Suma dwóch wektorów powinna wiec tez byc funkcją i istotnie definiujemy taka sumę jako zwykłą sumę funkcji, definiując jej wartość w argumencie x jako

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

Mnożenie zas funkcji przez skalar definiujemy jako

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x).$$

Zadanie 6. Pokazać, że zbiory z działaniami zdefiniowane w przykładach 1)-4) są przestrzeniami liniowymi.

Niech $\boldsymbol{V}$ bedzie przestrzenia liniową. Mówimy, że podzbiór $\boldsymbol{W}$ jest *podprzestrzenią* liniową, piszemy $\boldsymbol{W} < \boldsymbol{V}$, jeśli $\boldsymbol{W}$ też jest przestrzenią liniową.

Niech $\boldsymbol{V}$ bedzie przestrzenia liniową. Wektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ jest *kombinacja liniową* wektorów $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \boldsymbol{V}$, jeśli dla pewnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{K}$:

$$u = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}.$$

Niech $\boldsymbol{V}$ bedzie przestrzenia liniową. Mówimy, że wektory $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \boldsymbol{V}$są *liniowo niezależne*, jeśli z równości

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots \alpha_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

wynika

$$\alpha_1 = \ldots \alpha_n = 0.$$

Twierdzenie 1. Niech $\boldsymbol{V}$ bedzie przestrzenia liniową. Wektory $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \boldsymbol{V}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy najpierw, że wektory $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ są liniowo niezależne. Jeśli np. wektor $\boldsymbol{v_1}$ byłby liniowo zależny od pozostałych wektorów $\boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$, czyli istniałyby skalary $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{K}$, takie że

$$\boldsymbol{v_1} = \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v_n},$$

to

$$(-1)\boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} = 0,$$

a to przeczy liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ (współczynnik przy $\boldsymbol{v_1}$ nie jest równy zeru).

Załóżmy teraz, że żaden z wektorów $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ nie jest kombinacją liniową pozostałych. Załóżmy też nie wprost, że nie są to wektory liniowo niezależne. Zatem zachodzi równość

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \ldots \alpha_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

i nie wszystkie skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są zerami. Załóżmy, nie tracąc nic z ogólności, że np. $\alpha_1 \neq 0$. Mamy wtedy

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{v_2} + \ldots \frac{-\alpha_n}{\alpha_1} \boldsymbol{v_n}$$

wbrew założeniu, że $\boldsymbol{v_1}$ nie jest kombinacją liniową pozostałych wektorów.

□

Zadanie 7. Rozwiązując odpowiedni układ równań, przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ jako kombinację liniową wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Czy przedstawienie to jest jednoznaczne?

Zadanie 8. Pokazać, że jesli wektor $\boldsymbol{u}$ mozna przedstawić na dwa istotnie rózne sposoby jako kombinacje liniową wektorów $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$, to wektory $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ nie są liniowo niezależne.

Zadanie 9. Pokazać, że w $C[0,1]$ funkcje $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$ sa liniowo niezależne (jako wektory tej przestrzeni).

Bazą przestrzeni liniowej $\boldsymbol{V}$ nazywamy każdy taki układ wektorów liniowo niezależnych, że każdy wektor przestrzeni jest kombinacją liniową pewnych wektorów tego układu.

Pokażemy, że każde dwie bazy są równoliczne. Wynikać to będzie z twierdzenia 2.

Sformułujmy najpierw nastepujący lemat.

Lemat 1. Jeśli w pewnej przestrzeni liniowej wektory $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ sa niezależne, i $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ są dowolnymi skalarami, to wektory $\boldsymbol{a_1} - \alpha_1 \boldsymbol{a_n}, \ldots, \boldsymbol{a_{n-1}} - \alpha_{n-1} \boldsymbol{a_n}$ też są liniowo niezależne.

Zadanie 10. Udowodnić lemat 1.

Twierdzenie 2. Jęsli wektory $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ sa niezależne, a także wektory $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_m}$ sa niezależne oraz $n > m$, to nie można przedstawić wszystkich wektorów $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ jako pewnych kombinacji liniowych wektorów $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_m}$.

Dowód. Załóżmy, że jednak można, tzn. istnieją skalary $\beta_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, takie, że

$$\boldsymbol{a_i} = \beta_{i,1} \boldsymbol{b_1} + \ldots + \beta_{i,m} \boldsymbol{b_m} \tag{1}$$

dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$.

Załóżmy też, że m jest najmniejszą liczbą, dla której taka sytuacja może zajść, tzn.przy pomocy pewnych m wektorów niezależnych można reprezentować w postaci ich kombinacji liniowych pewną wiekszą niż m liczbę innych wektorów liniowo niezależnych. Od razu widać, że $m > 1$, bo przy pomocy jednego wektora $\boldsymbol{b}$, nie można reprezentować dwóch wektorów liniowo niezależnych, bo wszystkie reprezentacje maja postać $\beta \boldsymbol{b}$ i są liniowo zależne.

Z naszego założenia o minimalności m wynika teraz, że choć jeden współczynnik $\beta_{1,m}, \ldots, \beta_{n,m}$ musi być różny od zera. Załóżmy nie tracąc nic z ogólności, że $\beta_{n,m} \neq 0$. Wektory

$$\boldsymbol{a_1} - \frac{\beta_{1,m}}{\beta_{n,m}} \boldsymbol{a_n} = \left(\beta_{1,1} - \frac{\beta_{1,m}}{\beta_{n,m}} \beta_{n,1}\right) \boldsymbol{b_1} + \ldots + \left(\beta_{1,m-1} - \frac{\beta_{1,m}}{\beta_{n,m}} \beta_{n,m-1}\right) \boldsymbol{b_{m-1}}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{a_{n-1}} - \frac{\beta_{n-1,m}}{\beta_{n,m}} \boldsymbol{a_n} = \left(\beta_{n-1,1} - \frac{\beta_{n-1,m}}{\beta_{n,m}} \beta_{n,1}\right) \boldsymbol{b_1} + \ldots + \left(\beta_{n-1,m-1} - \frac{\beta_{n-1,m}}{\beta_{n,m}} \beta_{n,m-1}\right) \boldsymbol{b_{m-1}}$$

są na podstawie lematu 1 liniowo niezależne. Tak więc przy pomocy $m-1$ wektorów $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_{m-1}}$ reprezentujemy $n-1$ $(> m-1)$ wektorów niezależnych. Tu jednak

uzyskujemy sprzeczność z założeniem, że m była najmniejszą liczbą wektorów, dla których coś takiego mogło się zdarzyć. To kończy dowód twierdzenia,

□

Twierdzenie 3. Załóżmy, że pewna baza przestrzeni liniowej $\boldsymbol{V}$ ma n elementów. Wtedy każda inna baza ma też n eleemntów.

Dowód. Teza wynika natychmiast z definicji bazy i twierdzenia 3.

□

Najprostszym i najważniejszym przykładem bazy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest układ wektorów

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie twierdzenia 3 możemy teraz wprowadzić następującą definicję. *Wymiarem* przestrzeni liniowej nazywamy liczbę elementów jej bazy. Twierdzenie 3 mówi, że definicja ta jest poprawna, czyli jednoznaczna. Wymiar przestrzeni liniowej $\boldsymbol{V}$ oznaczać bedziemy przez $\dim(\boldsymbol{V})$. Mówiąc o wymiarze, rozważać będziemy dalej wyłącznie przestrzenie, dla których $\dim(\boldsymbol{V}) < \infty$, a więc takie, które mają bazę skończoną.

Niech $\boldsymbol{V}$ będzie przestrzenia liniową. Niech $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}$ będą pewnymi wektorami z tej przestrzeni. *Przestrzenią rozpiętą nad wektorami* $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych tych wektorów. Oznaczamy ten zbiór przez

$$\operatorname{span}(\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}\}) := \{\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{u_m} : \alpha_i \in \mathcal{K}, 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Zadanie 11. Pokazać, że $W = \operatorname{span}(\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}\})$ jest przestrzenią liniową.

Twierdzenie 4. Każdy maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni liniowej jest jej bazą. Także na odwrót, każda baza jest maksymalnym układem wektorów liniowo niezależnych.

Dowód. Jeśli pewien układ wektorów liniowo niezależnych A nie byłby bazą, istniałby wektor $\boldsymbol{u}$, który nie dawałby sie przedstawić jako liniowa kombinacja wektorów z układu A. Zatem układ $A \cup \{\boldsymbol{u}\}$ byłby też układem wektorów liniowo niezależnych (dlaczego?), czyli A nie byłby maksymalny. Niech teraz B bedzie bazą przestrzeni liniowej. Jest to układ maksymalny wektorów liniowo niezależnych, bowiem każdy inny wektor z przestrzeni przedstawia się jako kombinacja liniowa wektorów z B, a więc nie można juz dołączyć do B żadnego wektora, tak aby układ pozostał układem wektorów liniowo niezależnych.

□

Twierdzenie 5. Niech $\boldsymbol{V}$ bedzie przestrzenią liniową i $\dim(\boldsymbol{V}) = n$. Każdy układ wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni liniowej można powiększyć do bazy.

Dowód. Niech $A = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}\}$ bedzie układem wektorów liniowo niezależnych. Jesli układ ten nie jest bazą, to, na podstawie twierdzenia 4, nie jest maksymalny. Można więc znaleźć wektor $\boldsymbol{a_{m+1}}$, taki, że $A_1 = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{a_{m+1}}\}$ jest układem wektorów niezależnych. Jesli nie jest to jeszcze baza, to można znaleźć wektor $\boldsymbol{a_{m+2}}$, taki, że $A_2 = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{a_{m+1}}, \boldsymbol{a_{m+2}}\}$ jest układem wektorów niezależnych. Kontynuujemy ten proces, aż uzyskamy układ maksymalny. Jeśli tak miałoby się nie stać, to w pewnym momencie w systemie A_r bedzie wiecej niż n wektorów liniowo niezależnych i każdy z nich byłby kombinacją liniową wektorów z bazy, a to jest niemozliwe z twierdzenia 2.

$\square$

Zadanie 12. Pokazać, że jeśli $\dim(\boldsymbol{V}) = n$, $A = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}\}$, $C = \{\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_r}\}$ są układami wektorów liniowo niezależnych i $r > m$, to w C istnieje $r - m$ wektorów, które można dodać do A, tak aby nowy, w ten sposób otrzymany, układ r wektorów składał się z wektorów liniowo niezależnych. W szczególności jeśli $B = \{\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}\}$ jest bazą w $\boldsymbol{V}$, a $A = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}\}$ jest układem wektorów liniowo niezależnych, to A można uzupełnić do bazy $n - m$ wektorami z B.