ALGEBRA 2

WYKŁAD 2

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

REPREZENTACJA WEKTORA W BAZIE, ZMIANA BAZY

Niech V będzie przestrzenią liniową o skończonym wymiarze $\dim(V) = n$. Niech $B = \langle \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ będzie bazą przestrzeni V. To oznacza, że każdy wektor $\boldsymbol{v} \in V$ jest kombinacją liniową wektorów z bazy B:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots \alpha_n \boldsymbol{e_n}.$$

Zadanie 1. Pokazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{v} \in V$ taka reprezentacja w ustalonej bazie B jest jednoznaczna.

Wektor v bedziemy reprezentować jako kolumnę

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B ,$$

gdzie indeks B oznacza, że wektor $\boldsymbol{v}$ reprezentowany jest w bazie B. Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B.

Niech $B' = \langle \boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_n} \rangle$ także będzie pewną bazą w przestrzeni V. Naszym celem będzie teraz znalezienie receptury na reprezentowanie wektora w bazie B', jeśli znamy jego reprezentację w bazie B. Niech

$$\boldsymbol{e_1} = a_{1,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{1,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{1,n}\boldsymbol{e'_n},$$

$$\boldsymbol{e_2} = a_{2,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{2,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{2,n}\boldsymbol{e'_n},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{e_i} = a_{i,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{i,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{i,n}\boldsymbol{e'_n},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{e_n} = a_{n,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{n,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{n,n}\boldsymbol{e'_n}$$

bedą reprezentacjami wektorów z bazy B przy pomocy wektorów z B'. W zapisie wektorów jako kolumn równości te będą miały formę

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix}_{B'}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{2,n} \end{bmatrix}_{B'}, \ldots, \boldsymbol{e_i} = \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix}_{B'}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix}_{B'}.$$

Niech teraz wektor $\boldsymbol{v} \in V$ zapisuje sie jako nastepujaca kombinacja liniowa wektorów z bazy B:

$$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + \ldots + b_n\boldsymbol{e_n},$$

lub, oznaczając przez $[\boldsymbol{v}]_{B'}$ zapis kolumnowy wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B':

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

UWAGA. Zapisy

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

i

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_B$$

oznaczają to samo.

Mamy na podstawie powyższych równości:

$$\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + \ldots + b_i\boldsymbol{e_i} + \ldots + b_n\boldsymbol{e_n} =$$

$$\begin{gathered} b_1(a_{1,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{1,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{1,j}\boldsymbol{e'_j} + \ldots a_{1,n}\boldsymbol{e'_n}) \\ +b_2(a_{2,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{2,2}\boldsymbol{e'_2} + + \ldots + a_{2,j}\boldsymbol{e'_j} + \ldots + a_{2,n}\boldsymbol{e'_n}) + \ldots \\ +b_i(a_{i,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{i,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{i,j}\boldsymbol{e'_j} + \ldots + a_{i,n}\boldsymbol{e'_n}) + \ldots \\ +b_n(a_{n,1}\boldsymbol{e'_1} + a_{n,2}\boldsymbol{e'_2} + \ldots + a_{n,j}\boldsymbol{e'_j} + \ldots + a_{n,n}\boldsymbol{e'_n}) = \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (b_1a_{1,1} + b_2a_{2,1} + \ldots + b_ia_{i,1} + \ldots + b_na_{n,1})\boldsymbol{e'_1} + \\ (b_1a_{1,2} + b_2a_{2,2} + \ldots + b_ia_{i,2} + \ldots + b_na_{n,2})\boldsymbol{e'_2} + \ldots \\ (b_1a_{1,j} + b_2a_{2,j} + \ldots + b_ia_{i,j} + \ldots + b_na_{n,j})\boldsymbol{e'_j} + \ldots \\ (b_1a_{1,n} + b_2a_{2,n} + \ldots + b_ia_{i,n} + \ldots + b_na_{n,n})\boldsymbol{e'_n}. \end{gathered}$$

W zapisie kolumnowym:

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} b_1a_{1,1} + b_2a_{2,1} + \ldots + b_ia_{i,1} + \ldots + b_na_{n,1} \\ b_1a_{1,2} + b_2a_{2,2} + \ldots + b_ia_{i,2} + \ldots + b_na_{n,2} \\ \vdots \\ b_1a_{1,j} + b_2a_{2,j} + \ldots + b_ia_{i,j} + \ldots + b_na_{n,j} \\ \vdots \\ b_1a_{1,n} + b_2a_{2,n} + \ldots + b_ia_{i,n} + \ldots + b_na_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Zauważmy teraz, że reprezentacja kolumnowa wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B' to iloczyn macierzowy:

(1)
$$\begin{bmatrix} b_1a_{1,1}+b_2a_{2,1}+\ldots+b_ia_{i,1}+\ldots+b_na_{n,1} \\ b_1a_{1,2}+b_2a_{2,2}+\ldots+b_ia_{i,2}+\ldots+b_na_{n,2} \\ \vdots \\ b_1a_{1,j}+b_2a_{2,j}+\ldots+b_ia_{i,j}+\ldots+b_na_{n,j} \\ \vdots \\ b_1a_{1,n}+b_2a_{2,n}+\ldots+b_ia_{i,n}+\ldots+b_na_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{i,1} \ldots, a_{n,1} \\ a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{i,2} \ldots, a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{i,j} \ldots, a_{n,j} \\ \vdots \\ a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{i,n} \ldots, a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz po prawej stronie równości składa się z kolumn, które są zapisem w bazie B' wektorów z bazy B. Macierz tę nazywać będziemy *macierzą zmiany bazy* z B na B' i oznaczać

$$M_{B\to B'} := \begin{bmatrix} a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{i,1} \ldots, a_{n,1} \\ a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{i,2} \ldots, a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{i,j} \ldots, a_{n,j} \\ \vdots \\ a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{i,n} \ldots, a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Tak więc "przepisanie" wektora wyrażonego kolumnowo w bazie B na zapis w bazie B' możemy uzyskać, mnożąc wektor zapisany w bazie B przez macierz $M_{B\to B'}$. Równość (1) możemy więc zapisać w postaci:

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = M_{B\to B'}[\boldsymbol{v}]_B. \tag{2}$$

Często nowa baza B' podana jest w zapisie według bazy B, a nam chodzi o to, aby wektory bazy B zapisać we współrzędnych bazy B', bo dopiero wtedy możemy zapisać macierz $M_{B\to B'}$. Aby taki zapis uzyskać, zauważmy, że dla dowolnego wektora '$\boldsymbol{v}$ mamy na podstawie (3) i łączności mnożenia macierzy:

$$[\boldsymbol{v}]_B = M_{B'\to B}[\boldsymbol{v}]_{B'}) = M_{B'\to B}(M_{B\to B'}[\boldsymbol{v}]_B) = (M_{B'\to B}M_{B\to B'})[\boldsymbol{v}]_B. \tag{3}$$

Zadanie 2. Jeśli macierz A o rozmiarach $n\times n$ ma te własność, że $M[a_i]_{1\leqslant i\leqslant n} = [a_i]_{1\leqslant i\leqslant n}$ dla dowolnej jednokolumnowej macierzy $[a_i]_{1\leqslant i\leqslant n}$, to $A = I$ tzn. A jest macierzą identycznościową, tzn. ma jedynki na przekątnej i zera w pozostałych pozycjach.

Z (3) i zadania 2 wnioskujemy, że

$$M_{B'\to B}M_{B\to B'} = I,$$

a stąd, że

$$M_{B\to B'} = M^{-1}_{B'\to B}. \tag{4}$$

Przyklad 1. Mamy już wszystkie niezbędne instrumenty, które pozwalają przedstawić każdy dany wektor w nowej bazie. Rozważmy następujący przykład. Znajdźmy

macierz przejścia od bazy standardowej

$$B = \left\langle \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

do bazy

$$B' = \left\langle \boldsymbol{e'_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{e'_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{e'_3} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle.$$

Mamy oczywiście

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e'_1} &= 1\cdot\boldsymbol{e_1} + 1\cdot\boldsymbol{e_2} + 1\cdot\boldsymbol{e_3},\\ \boldsymbol{e'_2} &= 0\cdot\boldsymbol{e_1} + 1\cdot\boldsymbol{e_2} + 1\cdot\boldsymbol{e_3},\\ \boldsymbol{e'_3} &= 2\cdot\boldsymbol{e_1} + 0\cdot\boldsymbol{e_2} + 1\cdot\boldsymbol{e_3}.\end{aligned}$$

a zatem macierz $M_{B'\to B}$ ma postać

$$M_{B'\to B} = \begin{bmatrix}1, & 0, & 2\\ 1, & 1, & 0\\ 1, & 1, & 1\end{bmatrix}$$

Mamy więc równanie

$$M_{B'\to B} M_{B\to B'} = I,$$

czyli

$$\begin{bmatrix}1, & 0, & 2\\ 1, & 1, & 0\\ 1, & 1, & 1\end{bmatrix} M_{B\to B'} = \begin{bmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Manipulując wierszami macierzy $M_{B'\to B}$ (mnożąc je i dodając do siebie) i nie zmieniając macierzy $M_{B\to B'}$, jako wynik mnożenia dostajemy macierz otrzymaną z I poprzez identyczne operacje na wierszach jak te wykonywane na $M_{B'\to B}$. Chcemy poprzez te manipulacje doprowadzić macierz $M_{B'\to B}$ do postaci I. Wtedy lewa strona naszego równania przekształci się do $IM_{B\to B'}$. Zatem prawa przekształci się do $M_{B\to B'}$ (bo $IM_{B\to B'} = M_{B\to B'}$). W istocie, mając doczynienia z iloczynem $AB = C$ macierzy, dodawanie i mnożenie przez skalar wierszy macierzy A, przy niezmienianej macierzy B, daje te same zmiany dla macierzy C.

Zadanie 3. Przypomnieć dowód powyższej uwagi.

Odejmując w w równaniu (5) w macierzy $M_{B'\to B}$ (po lewej stronie) pierwszy wiersz od drugiego i trzeciego i wykonując te samą operację w macierzy I po prawej stronie otrzymujemy równanie:

$$\begin{bmatrix}1, 0, & 2\\ 0, 1, & -2\\ 0, 1, & -1\end{bmatrix} M_{B\to B'} = \begin{bmatrix}1, 0, & 0\\ -1, 1, & 0\\ -1, 0, & 1\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Odejmując teraz drugi wiersz od trzeciego w macierzy po lewej stronie i w macierzy po prawej stronie równości (6), otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix}1, & 0, & 2\\ 0, & 1, & -2\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix} M_{B\to B'} = \begin{bmatrix}1, & 0, & 0\\ -1, & 1, & 0\\ 0, & -1, & 1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Mnożąc teraz trzeci wiersz przez 2 i dodając do drugiego i odejmując od pierwszego w macierzy po lewej stronie i w macierzy po prawej stronie równości (7), otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} M_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -2 \\ -1, & -1, & 2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Zatem

$$M_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -2 \\ -1, & -1, & 2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Przedstawmy teraz wektor $\boldsymbol{v}$ mający w bazie B nastepującą reprezentację:

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

w bazie B'. Mamy, zgodnie ze wzorem (3),

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -2 \\ -1, & -1, & 2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} . = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając (w bazie standardowej B):

$$-1\boldsymbol{e'_1} + 3\boldsymbol{e'_2} + 1\boldsymbol{e'_3} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}]_B,$$

sprawdziliśmy, że wektor $\boldsymbol{v}$ reprezentowany w bazie B' ma w starej bazie B zadane na początku współrzędne.

Zadanie 4. W powyższej bazie B' reprezentować wektor, który w bazie standardowej B ma reprezentację

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Znaleźć macierz przejścia od bazy standardowej B do bazy

$$B'' = \left\langle \boldsymbol{e'_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e'_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e'_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Reprezentować w nowej bazie wektory, których reprezentacje w bazie standardowej są nastepujące:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Znaleźć macierz przejścia od bazy standardowej B' do bazy B'' (bazy powyżej zdefiniowane).

Zadanie 7. W przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^2$ znaleźć macierz przejścia od bazy standardowej

$$B = \left\langle \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

do bazy

$$B' = \left\langle \boldsymbol{e'_1} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}, \boldsymbol{e'_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Zacząć od pokazania, że B' jest istotnie bazą.

Nastepnie znając już postać macierzy przejścia $M_{B\to B'}$, wektor $\boldsymbol{v}$, który w bazie standardowej B ma reprezentację

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 3-i \end{bmatrix}$$

reprezentować w bazie B'.

Zadanie 8. Jeśli V jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru i B, B', B'' są bazami tej przestrzeni, to jak, znając macierze przejścia $M_{B\to B'}$ oraz $M_{B'\to B''}$, obliczyć macierz $M_{B\to B''}$? Odpowiedź uzasadnić.

UWAGA Gdy ustalona jest baza B przestrzeni, wtedy zamiast pisać

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

piszemu po prostu

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{C}^n$ w bazie standardowej zawsze opuszczamy indeks wskazujący na bazę.