ALGEBRA 2

WYKŁAD 3

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Niech V, W będa przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem skalarów $\mathcal{K}$ (przypomnijmy $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathcal{K} = \mathbb{C}$). Przekształcenie $f : V \to W$ nazywamy *liniowym*, jeśli dla dowolnych dla dwóch wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ i dowollnych dwóch skalarów $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ zachodzi równość

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}).$$

Twierdzenie 4. Odwzorowanie $f : V \to W$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia dwa następujace warunki

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \ \text{ (addytywność } f)$$

oraz

$$f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) \ \text{ (jednorodność } f)$$

dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, i dowolnego skalara $\alpha \in \mathcal{K}$.

Zadanie 1. Udowodnić powyższe twierdzenie.

Przykład 1. Rozważmy przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y - 2z \end{bmatrix}.$$

Sprawdzimy, że f jest przekształceniem liniowym.

Mamy dla dowolnych ustalonych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i wektorów

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} :$$

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = f\left(\alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 - 2(\alpha u_3 + \beta v_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \alpha u_2 \\ \alpha u_2 - 2\alpha u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta v_1 + \beta v_2 \\ \beta v_2 - 2\beta v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\alpha \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 - 2u_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 - 2v_3 \end{bmatrix} = \alpha f\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}).$$

Przykład 2. Niech P bedzie przestrzenią liniową wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Niech odwzorowanie $D : P \to P$ będzie zdefiniowane wzorem

$$D(w(x)) = w'(x)$$

(tak więc D jest operatorem brania pochodnej). Jak wiadomo $(v(x) + w(x))' = v'(x)+w'(x)$ oraz $(\alpha \cdot w(x))' = \alpha \cdot w'(x)$, a więc z twierdzenia 4 D jest odwzorowaniem liniowym.

Zadanie 2. Niech przekształcenie $f : C[0,1] \to \mathbb{R}^3$ będzie zdefinowane dla $\phi \in C[0,1]$ następującą formułą:

$$f(\phi) = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(1/2) \\ \phi(1) \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że f jest przekształceniem liniowym i każdy element $\mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej funkcji z $C[0,1]$.

Zadanie 3. Czy przekształcenie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym?

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli $f, g : V \to W$ są przekształceniami liniowymi, to przekształcenie $f + g$ zdefiniowane wzorem

$$(f + g)(\boldsymbol{v}) := f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$$

jest przekształceniem liniowym (dodawanie po lewej stronie równości to tylko symbol, który definiujemy; dodawanie po prawej stronie równości to dodawanie wektorów w przestrzeni W).

Zadanie 5. Pokazać, że jeśli $f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to przekształcenie (αf) zdefiniowane wzorem

$$(\alpha f)(\boldsymbol{v}) := \alpha f(\boldsymbol{v})$$

jest przekształceniem liniowym (mnożenie po lewej stronie równości to tylko symbol, który definiujemy; mnożenie po prawej stronie równości to mnożenie skalara przez wektor w przestrzeni W).

Niech V i W bedą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem skalarów. Niech $f : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. *Jądrem* odwzorowania f nazywamy zbiór tych wektorów z V, które przechodzą przez odwzorowanie f na wektor zerowy w przestzreni W. Zbiór ten oznaczamy $\mathrm{Ker}(f)$ (od ang. *kernel*). Zatem

$$\mathrm{Ker}(f) := \{\boldsymbol{v} : f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Zauważmy, że możemy napisać też

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}_W\})$$

(zazwyczaj wektor zerowy oznaczamy po prostu $\mathbf{0}$, tu dodaliśmy indeks $_W$, aby wyraźnie zaznaczyć, że chodzi o wektor z przestrzeni W; dalej będziemy raczej stosować uproszczoną notację).

Obraz odwzorowania f to zbiór wszystkich wartości odwzorowania f, czyli, inaczej mówiąc, zbiór tych wszystkich wektorów, na które przechodzą przez odwzorowanie f wektory z V. Zbiór ten oznaczamy $\mathrm{Im}(f)$ (od ang. *image*). Zatem

$$\mathrm{Im}(f) := \{\boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) \text{ dla pewnego } \boldsymbol{v} \in V\}.$$

Zadanie 6. Niech V będzie przestrzenią liniową i U pewnym jej podzbiorem. Pokazać, że na to, aby U był przestrzenią liniową (z tym samym dodawaniem wektorów co w V i tym samym ciałem skalarów, które przypisane jest do V, i z tym samym mnożeniem skalara przez wektor, które określone jest w V) potrzeba i wystarczy, aby zbiór U był zamknięty na dodawanie i mnożenie wektora przez skalar (tzn. aby suma wektorów z U była w U i aby wynik mnożenia dowolnego wektora z U przez dowolny skalar pozostawał był w U).

Twierdzenie 5. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi i niech $f : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wtedy $\mathrm{Ker}(f)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V, a $\mathrm{Im}(f)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W.

Dowód. Na podstawie tezy zadania 6 wystarczy sprawdzić, czy $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ są zamknięte na dodawanie wektorów i mnożenie ich przez skalar.
Niech więc $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$. Mamy stąd i z liniowości f:

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V.$$

Zatem $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$. Mamy także z liniowości f dla $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$

$$f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_V,$$

skąd $\alpha\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$.
Niech teraz $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathrm{Im}(f)$. Zatem dla pewnych $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$

$$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r} \text{ oraz } f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{s}.$$

Mamy stąd i z liniowości f:

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}),$$

a zatem $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \in \mathrm{Im}(f)$. Także dla $\boldsymbol{s}$ i $\boldsymbol{v}$ jak wyżej oraz dowolnego skalara α mamy znów z liniowości f:

$$\alpha\boldsymbol{s} = \alpha f(\boldsymbol{v}) = f(\alpha\boldsymbol{v}).$$

Stąd $\alpha\boldsymbol{s} \in \mathrm{Im}(f)$.

$\square$.

Kolejne twierdzenie podaje związek pomiędzy wymiarem jądra odwzorowania liniowego i wymiarem obrazu tego odwzorowania.

Twierdzenie 6. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi i niech $f : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Zakładamy też, że wymiar przestrzeni V jest skończony, $\dim = n < \infty$. Zachodzi następujący zwiazek między wymiarami $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ i $\dim(\mathrm{Im}(f))$:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V).$$

Dowód. Niech wektory $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_m}$ będą bazą przestrzeni $\mathrm{Ker}(f)$. Jest to w szczególności układ wektorów liniowo niezależnych. Zatem można go uzupełnić do bazy przestrzeni V pewnymi wektorami $\boldsymbol{e_{m+1}}, \boldsymbol{e_{m+2}}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$. Pokażemy, że wektory $f(\boldsymbol{e_{m+1}}), f(\boldsymbol{e_{m+2}}), \ldots, f(\boldsymbol{e_n})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathrm{Im}(f)$. Oczywiście wszystkie te wektory są elementami przestrzeni $\mathrm{Im}(f)$. Zatem jeśli pokażemy, że rozpinają przestrzeń $\mathrm{Im}(f)$ (tzn. każdy wektor tej przestrzeni jest ich kombinacją liniową) i że są liniowo niezależne, oznaczać to będzie, że są bazą dla tej przestrzeni.

Niech $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(f)$. Wtedy $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ dla pewnego $\boldsymbol{v} \in V$. Wektor $\boldsymbol{v}$ jest pewną kombinacją liniową wektorów bazy:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e_m} + \alpha_{m+1} \boldsymbol{e_{m+1}} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e_n}.$$

Zatem, ponieważ f jest odwzorowaniem liniowym,

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = f(\alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e_m} + \alpha_{m+1} \boldsymbol{e_{m+1}} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e_n}) =$$

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{e_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e_m}) + \alpha_{m+1} f(\boldsymbol{e_{m+1}}) + \ldots + \alpha_n f(\boldsymbol{e_n}) =$$

$$\text{(korzystamy teraz z faktu, że } \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e_m} \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\alpha_{m+1} f(\boldsymbol{e_{m+1}}) + \ldots + \alpha_n f(\boldsymbol{e_n}).$$

zatem istotnie każdy wektor z $\mathrm{Im}(f)$ jest kombinacją liniową wektorów

$$f(\boldsymbol{e_{m+1}}), f(\boldsymbol{e_{m+2}}), \ldots, f(\boldsymbol{e_n}).$$

Pokażemy teraz, że wektory te są liniowo niezależne. Załóżmy, że ich pewna kombinacja liniowa zeruje się, tzn.

$$\beta_1 f(\boldsymbol{e_{m+1}}) + \beta_2 f(\boldsymbol{e_{m+2}}) + \ldots + \beta_{n-m} f(\boldsymbol{e_n}) = \boldsymbol{0}_W.$$

Z liniowości f:

$$\beta_1 f(\boldsymbol{e_{m+1}}) + \beta_2 f(\boldsymbol{e_{m+2}}) + \ldots + \beta_{n-m} f(\boldsymbol{e_n}) = f(\beta_1 \boldsymbol{e_{m+1}} + \beta_2 \boldsymbol{e_{m+2}} + \ldots + \beta_{n-m} \boldsymbol{e_n}),$$

a to wobec poprzedniej równości oznacza, że wektor $\beta_1 \boldsymbol{e_{m+1}}) + \beta_2 \boldsymbol{e_{m+2}} + \ldots + \beta_{n-m} \boldsymbol{e_n}$ należy do $\mathrm{Ker}(f)$. Można więc przedstawić ten wektor jako kombinację liniową wektorów z naszej bazy $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\beta_1 \boldsymbol{e_{m+1}} + \beta_2 \boldsymbol{e_{m+2}} + \ldots + \beta_{n-m} \boldsymbol{e_n} = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e_m},$$

skąd

$$(-\alpha_1) \boldsymbol{e_1} + \ldots + (-\alpha_m) \boldsymbol{e_m} + \beta_1 \boldsymbol{e_{m+1}} + \beta_2 \boldsymbol{e_{m+2}} + \ldots + \beta_{n-m} \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{0}_V.$$

Ponieważ wektory $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ tworzą baze, więc wszystkie współczynniki muszą być równe zeru

$$-\alpha_1 = \ldots - \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_{n=m} = 0$$

(nas oczywiście interesują tu tylko współczynniki $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-m} = 0$). Zatem wektory

$$f(\boldsymbol{e_{m+1}}), f(\boldsymbol{e_{m+2}}), \ldots, f(\boldsymbol{e_n})$$

są istotnie liniowo niezależne, a zatem tworza bazę przestrzeni $\mathrm{Im}(f)$. Tak więc,

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - m,$$

i, ponieważ

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = m,$$

twierdzenie jest udowodnione.

$\square$

Zadanie 7. Udowodnić, że jeśli $f : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym, to wymiar obrazu f jest nie większy niż wymiar przestrzeni V.

Zadanie 8. Pokazać, modyfikując treść i rozwiązanie zadania 2, że istnieje odwzorowanie liniowe przestrzeni $C[0,1]$ **na** każdą przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Stąd i z zadania 7 wyciągnąć wniosek, że przestrzeń $C[0,1]$ ma wymiar nieskończony.