CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 1

2020/21

RODZINY JEDNOSTAJNIE CAŁKOWALNE

Rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ jest *jednostajnie całkowalna*, jeśli

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \int_{[|X_\alpha|>M]} |X_\alpha|\, dP \to 0, \tag{1}$$

dla $M \to \infty$.

Bardzo użyteczna jest następująca charakteryzacja rodzin jednostajnie cakowałnych.

Twierdzenie 1. Rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada nastepujące dwie własności:

1) $\sup_{\alpha\in\Lambda} E|X_\alpha| < \infty$;

2) $\sup\{\int_A |X_\alpha| dP : P(A) < \delta \text{ oraz } \alpha \in \Lambda\} \to 0$, dla $\delta \to 0$.

Dowód. Najpierw udowodnimy, że z jednostajnej całkowalności rodziny $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ wynikają własności 1) i 2). Tak więc załóżmy, że rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ jest jednostajnie całkowalna. Wtedy dla dostatecznie dużego M mamy

$$\int_{[|X_\alpha|\geqslant M]} |X_\alpha| dP < 1.$$

Stąd

$$E|X_\alpha| = \int_{[|X_\alpha|<M]} |X\alpha| dP + \int_{[|X_\alpha|\geqslant M]} |X_\alpha| dP \leqslant M + 1.$$

To dowodzi 1).

Teraz udowodnimy 2). Niech $\epsilon > 0$ l i niech M będzie na tyle duże, aby

$$\int_{[|X_\alpha|\geqslant M]} |X_\alpha| dP < \epsilon/2,$$

dla każdego $\alpha \in \Lambda$. Niech teraz $P(A) < M\epsilon/2$. Mamy wtedy

$$\int_A |X_\alpha| dP = \int_{A\cap[X_\alpha\geqslant M]} |X_\alpha| dP + \int_{A\cap[X_\alpha<M]} |X_\alpha| dP \leqslant$$

$$\int_{[X_\alpha\geqslant M]} |X_\alpha| dP + MP(A) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Zatem własność 2) jest udowodniona.

Udowodnimy teraz odwrotną implikację, czyli pokażemy, że z warunków 1) and 2) wynika jednostajna całkowalność.

Niech $\epsilon > 0$. Z 2) istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\int_A |X_\alpha|\, dP < \epsilon,$$

o ile $P(A) < \delta$. Z 1) $\sup_{\alpha\in\Lambda} E|X_\alpha|$ jest liczbą skończoną. Niech $R = \sup_{\alpha\in\Lambda} E|X_\alpha|$. Niech $M > R/\delta$. Wtedy

$$P[|X_\alpha| \geqslant M] \leqslant \frac{1}{M}\int_{[|X_\alpha|\geqslant M]} |X_\alpha| dP \leqslant \frac{1}{M} E|X_\alpha| \leqslant \frac{R}{M} < \delta.$$

Stąd

$$\int_{[|X_\alpha|\geqslant M]} |X_\alpha| dP < \epsilon.$$

□

Udowodnimy teraz lemat, który będzie przydatny w dowodzie kolejnego twierdzenia.

Lemat. Jeśli $Y \in L_1$, $Y_n \in L_1$, $n \in \mathbb{N}$, są nieujemnymi zmiennymi losowymi, $Y_n \xrightarrow{P} Y$,$\lim_n EY_n = EY$ oraz $\lim_n P(A_n) = 1$, to

$$\lim_n \int_{A_n^c} Y_n = 0.$$

Dowód. Załózmy nie wprost, że teza nie zachodzi. Przechodząc do podciągu, możemy założyć, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n^c} Y_n \, dP = a > 0.$$

Ewentualnie przechodząc ponownie do podciagu możemy założyć, że $Y_n \to Y$ p.w. oraz $\mathbf{1}_{A_n} \to 1$ p.w. Mamy

$$EY_n - EY = \int_{A_n} Y_n \, dP + \int_{A_n^c} Y_n \, dP - \int_{A_n} Y \, dP - \int_{A_n^c} Y \, dP. \tag{2}$$

Z założenia wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} EY_n = EY. \tag{3}$$

Ponieważ $\mathbf{1}_{A_n} \to 1$ p.w., więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} Y \, dP = \lim_n E\mathbf{1}_{A_n} Y = EY. \tag{4}$$

Zatem z (2), (3), (4) dostajemy:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(EY - EY_n) + \lim_{n\to\infty} \int_{A_n^c} Y \, dP \geqslant \liminf n \to \infty \int_{A_n} Y_n \, dP - EY + \liminf_{n\to\infty} \int_{A_n^c} Y_n \, dP =$$

$$\liminf_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A_n} Y_n] - EY + a \geqslant E[\liminf_{n\to\infty}(\mathbf{1}_{A_n} Y_n)] - EY + a = EY - EY + a = a > 0$$

a to daje sprzeczność.

□

Możemy teraz udowodnić następujace twierdzenie, które zawiera m.in. nowe twierdzenie graniczne typu "całka z granicy jest granicą całek".

Twierdzenie 2. Niech $p \geqslant 1$ i niech X_n bedzie ciągiem zmiennych losowych zbieżnych do X wg prawdopodobieństwa. Zakładamy także, że zmienne losowe X oraz X_n, $n \in \mathbb{N}$, należą do L_p. Wtedy następujące warunki są równoważne:

i) $X_n \stackrel{L_p}{\to} X$,

ii) rodzina $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ jest jednostajnie całkowalna,

iii) $E|X_n|^p \to E|X|^p$.

Dowód.

i)$\Rightarrow$ii).

Ponieważ, wobec $X_n \stackrel{L_p}{\to} X$, mamy $E|X_n|^p \to E|X|^p$, skąd wynika, że $\sup_n E|X_n|^p < \infty$. Z $X_n \stackrel{L_p}{\to} X$ wynika też, że dla każdego ustalonego zdarzenia A

$$\int_A |X_n|^p \, dP \to \int_A |X|^p \, dP. \tag{5}$$

Załóżmy nie wprost, że istnieje $\varepsilon > 0$ oraz taki ciąg zdarzeń (A_k), i indeksów (n_k),że $\lim_k P(A_k) = 0$ oraz

$$\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \, dP > \varepsilon > 0.$$

Przechodząc ewentualnie do podciagu, możemy założyć, że $P(A_k) < 1/2^k$. Niech

$$B_m = \bigcup_{k>m} A_k.$$

Wtedy $P(B_m) < 1/2^m$ czyli $P(B_m) \to 0$, a więc dla pewnego m, wobec $E|X|^p < \infty$, otrzymamy

$$\int_{B_m} |X|^p \, dP < \varepsilon,$$

ale dla każdego $k > m$ mamy

$$\int_{B_m} |X_{n_k}|^p \, dP \geqslant \int_{A_k} |X_{n_k}|^p > \varepsilon.$$

Z atem

$$\int_{B_m} |X_{n_k}|^p \, dP \not\to \int_{B_m} |X|^p \, dP,$$

a to daje sprzeczność z (5).

ii)$\Rightarrow$iii). Załóżmy teraz, że rodzina $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest jednostajnie całkowalna. Niech $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że jeśli zmienne losowe X_n zbiegają do X wg prawdopodobieństwa, to także zmienne losowe $|X_n|^p$ zbiegają do $|X|^p$ wg prawdopodobieństwa. Mamy

$$|E|X_n|^p - E|X|^p| = |E[|X_n|^p - |X|^p]| \leqslant E||X_n|^p - |X|^p| =$$

$$\int_{[||X_n|^p - |X|^p| \leqslant \varepsilon]} ||X_n|^p - |X|^p| \, dP + \int_{[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon]} ||X_n|^p - |X|^p| \, dP \leqslant$$

$$\varepsilon + \int_{[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon]} |X_n|^p \, dP + \int_{[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon]} |X|^p \, dP.$$

Ponieważ $P[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon] \to 0$ dla $n \to \infty$ i rodzina $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest jednostajnie całkowalna, więc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon]} |X_n|^p \, dP = 0.$$

Ponieważ $|X|^p \in L_1$, więc także

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[||X_n|^p - |X|^p| > \varepsilon]} |X|^p \, dP = 0.$$

Zatem wobec dowolnosci $\varepsilon > 0$ dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} |E|X_n|^p - E|X|^p| = 0.$$

iii)$\Rightarrow$i). Niech $Y = |X|^p$ i $Y_n = |X_n|^p$. Mamy pokazać

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0.$$

Mamy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$E|X_n - X|^p = \int_{[|x_n - X| > \varepsilon]} |X_n - X|^p \, dP + \int_{[|x_n - X| > \varepsilon]} |X_n - X|^p \, dP \leqslant$$

$$\int_{[|x_n - X| > \varepsilon]} |X_n - X|^p \, dP + \varepsilon.$$

Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ wystarczy pokazać

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[|x_n - X| > \varepsilon]} |X_n - X|^p = 0.$$

Mamy z nierówności Minkowskiego:

$$\left(\int_{[|X_n - X| > \varepsilon]} |X_n - X|^p \, dP \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{[|X_n - X| > \varepsilon]} |X_n|^p \, dP \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{[|X_n - X| > \varepsilon]} |X|^p \, dP \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawiając w udowodnionym wyżej lemacie $Y = |X|^p$, $Y_n = |X_n|^p$, $A = [|x_n - X| \leqslant \varepsilon]$, dostajemy z tezy lematu

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[|X_n - X| > \varepsilon]} |X_n|^p \, dP = 0.$$

Ponieważ także

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{[|X_n - X| > \varepsilon]} |X|^p \, dP \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

ta część dowodu jest zakończona.

Zatem wszystkie implikacje zostały udowodnione.

$\square$