CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 5

2020/21

MARTYNGAŁY Z CZASEM DYSKRETNYM, TWIERDZENIE DOOBA O ZBIEŻNOŚCI SUBMARTYNGAŁU

Niech $r < s$ będą liczbami rzeczywistymi. Zdefiniujmy *liczbę przecięć w górę odcinka* $[r, s]$ przez skończony ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Niech $t_1 = \min\{i \leqslant N : a_i \leqslant r\}$. Jeśli zbiór, po którym bierzemy tu minimum jest pusty, definiujemy $t_1 = N$. Niech $t_2 = \min\{i \leqslant N : i > t_1 \text{ i } a_i \geqslant s\}$. I znów, jeśli zbiór, po którym bierzemy tu minimum jest pusty, definiujemy $t_2 = N$. Załóżmy, że liczby $t_1, t_2, \ldots, t_{2k-1}, t_{2k}$ zostały już zdefiniowane. Niech teraz $t_{2k+1} = \min\{i \leqslant N : i > t_{2k} \text{ i } a_i \leqslant r\}$. Jeśli zbiór, po którym bierzemy tu minimum jest pusty, definiujemy $t_{2k+1} = N$. Niech $t_{2k+2} = \min\{i \leqslant N : i > t_{2k+1} \text{ i } a_i \geqslant s\}$.I znów, jeśli zbiór, po którym bierzemy tu minimum jest pusty, definiujemy $t_{2k+2} = N$. Liczbę l przecięć w górę odcinka $[r, s]$ ciągiem $a_1, a_2, \ldots, a_N$ definiujemy jako

$$l := l_{[r,s]}^{(a_i)_{i \leqslant N}} = \max\{k : a_{t_{2k-1}} \leqslant r \text{ i } a_{t_{2k}} \geqslant s\}.$$

Niech teraz dana bedzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i proces stochastyczny $(X_i)_{1 \leqslant i \ leqN}$ adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_\rangle)_{1 \leqslant i \ leqN}$. Rozważamy dla odcinka $[r, s]$ j.w. liczbę $l(\omega)$ przecięć w górę odcinka $[r, s]$ ciągiem $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_N(\omega)$. Zauważmy, że l jest zmienną losową, tzn. jest $\mathcal{F}$-mierzalna:

$$[l \geqslant k] = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2k} \leqslant N} \bigcap_{j=1}^{k} \left([X_{i_j} \leqslant r] \cap [X_{i_{j+1}} \geqslant s] \right).$$

Lemat 1. Niech $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ będzie submartyngałem adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Dla $l = l_{[r,s]}^{(X_i)}$ mamy

$$El \leqslant \frac{1}{s-r} E(X_N - r)^+ \leqslant \frac{1}{s-r}(EX_N^+ + |r|).$$

Dowód. Zauważmy, że liczba $l(\omega)$ przecięć w górę odcinka $[r, s]$ ciągiem $X_1(\omega) \ldots X_n(\omega)$ jest równa liczbie przecięć w górę odcinka $[0, r-s]$ ciągiem ciągiem $Y_1, \ldots, Y_N$, gdzie $Y_i = (X_i(\omega) - r)^+$. Zauważmy, że $(Y_i)_{i=1}^N$ jest także submartyngałem (adaptowanym do tej samej filtracji). Niech $Y_0 = 0$. Ponieważ zmienne losowe Y_i, $i > 0$, są nieujemne ciąg $(Y_i)_{i=0}^N$ jest nadal submartyngałem, gdzie do filtracji dodajemy jakąkolwiek σ-algebrę $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Ponieważ różnice $Y_{t_{2i}} - Y_{t_{2i-1}}$ są zawsze nieujemne, dla dowolnej $\omega \in \Omega$ mamy

$$l(\omega) \leqslant \frac{1}{s-r}[(Y_{t_2}(\omega) - Y_{t_1}(\omega)) + (Y_{t_4}(\omega) - Y_{t_3}(\omega)) + \ldots (Y_{t_{2N}}(\omega) - Y_{t_{2N-1}}(\omega))].$$

(Zauważmy, że czasy zatrzymania t_i zostały zdefiniowane dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i pewna liczba ostatnich skladników powyższej sumy jest równa zeru; nie ma to jednak żadnego znaczenia dla naszych dalszych obliczeń.) Nakładając na obie strony powyższej

równości wartość oczekiwaną i korzystając z lematu o opcjonalnym zatrzymaniu, mamy $E(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \geqslant 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ (to uzasadnia drugą nierówność poniżej) i otrzymujemy:

$$El(\omega) \leqslant \frac{1}{s-r}[E(Y_{t_2} - Y_{t_1}) + E(Y_{t_4} - Y_{t_3}) + \ldots + E(Y_{t_{2N}} - Y_{t_{2N-1}})] \leqslant$$

$$\frac{1}{s-r}[E(Y_{t_1} - Y_{t_0}) + E(Y_{t_2} - Y_{t_1}) + \ldots + E(Y_{t_{2N}} - Y_{t_{2N-1}})] =$$

$$\frac{1}{s-r}EY_{t_{2N}} = \frac{1}{s-r}EY_{t_N} = \frac{1}{s-r}EY_N = \frac{1}{s-r}E(X_N - r)^+ \leqslant \frac{1}{s-r}(EX_N^+ + |r|)$$

□

Jesteśmy już teraz gotowi do przedstawienia twierdzenia Dooba o zbieżności submartyngału. Jest to jedno z fundamentalnych twierdzeń całej teorii martyngałów.

Twierdzenie 1 (Dooba o zbieżności). Niech $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ będzie submartyngałem adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Wtedy
i) $X_{-\infty} = \lim_{i\to-\infty} X_i \in \bar{\mathbb{R}}$ istnieje p.w.;
ii) $EX_{-\infty}^+ < \infty$;
iii) dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$,

$$\int_A X_{-\infty}\, dP \leqslant \int_A X_i\, dP$$

dla każdego $i \in \mathbb{Z}$. Tak więc, jeśli $EX_{-\infty}^- < \infty$, dla $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{i=i}^{\infty} \mathcal{F}_{-i}$, $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}}$ jest submartyngałem adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}}$.

Dalej zakładamy dodatkowo, że $\sup_{i\in\mathbb{Z}} EX_i^+ < \infty$. Wtedy
iv) granica $X_\infty = \lim_{i\to\infty} X_i$ istnieje p.w.;
v) $E|X_\infty| < \infty$;
vi) proces $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}}$ jest submartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\{X_i^+ : i \in \mathbb{Z}\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Dowód.

i). Dążąc do sprzeczności, załóżmy, iż zdarzenie, że granica $\lim_{i\to-\infty} X_i$ nie istnieje ma prawdopodobieństwo większe niż zero (jest łatwym ćwiczeniem sprawdzenie, że ten zbiór jest zdarzeniem, tzn. jest $\mathcal{F}$-mierzalny). Zatem zakładamy

$$P[\liminf_{i\to-\infty} X_i < \limsup_{i\to-\infty} X_i] > 0.$$

Jako że

$$[\liminf_{i\to-\infty} X_i < \limsup_{i\to-\infty} X_i] = \bigcup_{r<s, r,s\in\mathbf{Q}} [\liminf_{i\to-\infty} X_i < r < s < \limsup_{i\to-\infty} X_i],$$

możemy znaleźć dwie liczby wymierne $r < s$, takie, że

$$P[\liminf_{i\to-\infty} X_i < r < s < \limsup_{i\to-\infty} X_i] > 0.$$

Niech $l^{(N)}(\omega)$ będzie liczbą przecięć w górę odcinka $[r, s]$ przez ciąg $X_{-N}(\omega), \ldots, X_0(\omega)$. Z definicji lim sup and lim inf

$$l^{(N)}(\omega) \to \infty$$

dla $\omega \in [\liminf_{i\to-\infty} X_n < r < s \limsup_{i\to-\infty} X_i]$. Stąd $El^{(N)} \to \infty$, ponieważ $P[\liminf_{i\to-\infty} X_i < r < s < \limsup_{i\to\infty} X_i] > 0$. Z drugiej strony, z poprzedzającego twierdzenie lematu wiemy, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$

$$El^{(N)} < \frac{1}{s-r}(EX_0 - r)^+ \leqslant \frac{1}{s-r}(EX_0^+ + |r|) < \infty.$$

Jest to oczywista sprzeczność.

ii) Wiemy z i), że granica $X_{-\infty}^+ = \lim_{i\to-\infty} X_i^+ \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieje p.w. Wiemy też, że $(X_i^+, \mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ jest submartyngałem. Stosując lemat Fatou, otrzymujemy

$$EX_{-\infty}^+ = E \lim_{i\to\infty} X_{-i}^+ \leqslant \liminf_{i\to\infty} EX_{-i}^+ \leqslant EX_0^+ < \infty.$$

iii). Niech $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$. Wtedy także $A \in \mathcal{F}_i$ dla $i \in \mathbb{Z}$. Pokażemy teraz, że

$$\int_A X_{-\infty}\, dP \leqslant \int_A X_i\, dP$$

dla każdego $i \in \mathbb{Z}$.

Niech $i_0 \in \mathbb{Z}$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(\max(X_i, -n))_{i\in\mathbb{Z}}$ jest submartyngałem. Stosując lemat Fatou aby otrzymać drugą z poniższych nierówności, dostajemy

$$\int_A \max(X_{i_0}, -n)\, dP \geqslant \lim_{i\to\infty} \int_A \max(X_{-i}, -n)\, dP \geqslant \int_A \max(X_{-\infty}, -n)\, dP.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \max(X_{i_0}, -n)\, dP = \int_A X_{i_0}\, dP$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \max(X_{-\infty}, -n)\, dP = \int_A X_{-\infty}\, dP.$$

iv). Tu dowód jest analogiczny do dowodu i). Dla oszacowań używamy $\sup_{n\in\mathbb{N}}(EX_n^+ + |r|) < \infty$ zamiast $EX_0^+ + |r|$.

v). Zauważmy najpierw, że także $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$. Mamy

$$EX_n^+ - EX_n^- = EX_n \geqslant EX_1,$$

i stąd

$$EX_n^- \leqslant EX_n^+ - EX_1 \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n^+ + E|X_1|.$$

Stąd wynika, że

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n^- < \infty,$$

i dostajemy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty.$$

Z lematu Fatou

$$E|X_\infty| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty.$$

vi). ($\Leftarrow$) Załóżmy najpierw, że rodzina $\{X_i^+ : i \in \mathbb{Z}\}$ jest jednostajnie całkowalna. Wtedy dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ rodzina $\{\max(X_i, -m) : i \in \mathbb{Z}\}$ jest jednostajnie całkowalna. Istotnie, niech A będzie dowolnym zdarzeniem. Mamy

$$\int_A |\max(X_i, -m)|\, dP \leqslant \int_A X_i^+\, dP + m \cdot P(A). \tag{1}$$

Tak więc z jednostajnej całkowalności rodziny $\{X_i^+ : i \in \mathbb{Z}\}$ dostajemy

$$\sup\{\int_A |\max(X_i, -m)|\, dP : P(A) < \epsilon, i \in \mathbb{Z}\} \to 0,$$

dla $\epsilon \to 0$, ponieważ zbieżne do zera są jednostajnie ze względu na ϵ (tzn. niezależnie od A) oba składniki po prawej stronie nierówności (1). Mamy także

$$\sup\{E|\max(X_i, -m)| : i \in \mathbb{Z}\} < \sup\{EX_i^+ : i \in \mathbb{Z}\} + m < \infty,$$

znów z jednostajnej całkowalności rodziny $\{X_i^+ : i \in \mathbb{Z}\}$. Tak więc rodzina $\{\max(X_i, -m) : i \in \mathbb{Z}\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Niech teraz $n_0 \in \mathbb{N}$ i niech $A \in \mathcal{F}_{n_0}$. Z twierdzenia o całkowaniu granicy ciągów jednostajnie całkowalnych

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \max(X_n, -m)\, dP = \int_A \max(X_\infty, -m)\, dP,$$

i ciąg z lewej strony nierówności jest niemalejący dla $n \geqslant n_0$. To daje

$$\int_A \max(X_{n_0}, -m)\, dP \leqslant \int_A \max(X_\infty, -m)\, dP,$$

Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżnosci monotonicznej dla $m \to \infty$, dostajemy

$$\int_A X_{n_0}\, dP \leqslant \int_A X_\infty\, dP.$$

Ze względu na iii) to kończy dowód, że proces $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}}$ jest submartyngałem ze względu na filtrację $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}}$.

($\Rightarrow$) Załóżmy teraz, że $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}}$ jest submartyngałem ze względu na filtrację $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,\infty\}}$. Teza wynika z lematu 2 z wykładu 4.