CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 6

2020/21

NIERÓWNOŚCI MARTYNGAŁOWE; SUBMARTYNGAŁY L_p

Udowodnimy twierdzenie wiążące wartość oczekiwaną supremum po trajektoriach z supremum wartości oczekiwanych na poziomach czasowych dla submartyngału L_p, $p > 1$. Kluczowe znaczenie będą mialy tu dwa nastepujące lematy.

Lemat 1. Niech $p > 1$. Jeśli X, Y są nieujemnymi zmiennymi losowymi, $X \in L_p$ oraz dla każdego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$tP[Y \geqslant t] \leqslant \int_{[Y \geqslant t]} X \, dP,$$

to

$$||Y||_p \leqslant q||X||_p,$$

dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dowód. Niech $F(t) = P[Y < t]$ and $G(t) = P[Y \geqslant t]$. Mamy

$$EY^p = \int_0^\infty t^p \, dF(t) = \int_0^\infty t^p \, d(1-G(t)) = -\int_0^\infty t^p \, dG(t) = \int_0^\infty G(t) d(t^p) - \lim_{x\to\infty} (t^p G(t))|_0^t \leqslant$$

$$\int_0^\infty G(t) d(t^p) \leqslant \int_0^\infty t^{-1} \left(\int_{[Y \geqslant t]} X \, dP) \right) d(t^p) = \int_0^\infty E\mathbf{1}_{[Y \geqslant t]} t^{-1} X d(t^p) =$$

$$E \int_0^\infty \mathbf{1}_{[Y \geqslant t]} t^{-1} X \, d(t^p) = EX \int_0^Y t^{-1} X d(t^p) = EX \int_0^{Y^p} s^{-\frac{1}{p}} \, ds = EX \frac{1}{1-\frac{1}{p}} s^{-\frac{1}{p}+1}|_0^{Y^p} =$$

$$EX \frac{p}{p-1} s^{\frac{p-1}{p}}|_0^{Y^p} = \frac{p}{p-1} EXY^{p-1} \leqslant q||X||_p ||Y^{p-1}||_q = q||X||_p \cdot (EY^p)^{\frac{1}{q}} = q||X||_p \cdot (EY^p)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Porównując skrajne wyrazy w powyższym ciągu nierówności, otrzymujemy:

$$EY^p \leqslant q||X||_p \cdot (EY^p)^{\frac{p-1}{p}},$$

skąd ostatecznie

$$||Y||_p \leqslant q||X||_p.$$

□

Dla dowolnego procesu stochastycznego $(X_n)_n$ zdefiniujmy

$$X^*(\omega) := \sup_n X_n(\omega).$$

Lemat 2. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ będzie nieujemnym submartyngałem, gdzie $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$. Wtedy dla każdego $\alpha \geqslant 0$:

$$\alpha P[X^* \geqslant \alpha] \leqslant \int_{[X^*\geqslant\alpha]} X_\infty \leqslant \sup_n EX_\infty. \tag{1}$$

Dowód. Jeśli $\alpha = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że $\alpha > 0$. Niech $0 < \beta < \alpha$. Zdefiniujmy następujące czasy zatrzymania

$$S(\omega) = \min\{i : X_i > \beta\}$$

oraz

$$S_n = \min(S, n).$$

Ponieważ $S_n < k$, z twierdzenia o opcjonalnym zatrzymaniu dwuelementowy proces $(X^+_{S_n}, X_k)$ jest submartyngałem (względem filtracji $(\mathcal{F}_{S_n}, \mathcal{F}_k)$). Zatem

$$\beta P[X_{S_n} > \beta] + \int_{[X_{S_n}\leqslant\beta]} X_{S_n}\, dP \leqslant EX_{S_n} \leqslant EX_k.$$

Dla $n \to \infty$ w nierówności porównującej skrajne wyrazy wyżej, dostajemy z jednostajnej całkowalności ciągu $(X_n)_n$

$$\beta P[X^* > \beta] + \lim_n E[\mathbf{1}_{[X_{S_n}\leqslant\beta]} X_n] = \beta P[X^* > \beta] + E[\mathbf{1}_{[X^*\leqslant\beta]} X_\infty] \leqslant EX_\infty.$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy nierówność

$$\beta P[X^* > \beta] \leqslant \int_{[X^*>\beta]} X_\infty\, dP.$$

Przechodząc z β do granicy $\beta \nearrow \alpha$ dostajemy nierówność z tezy.

□

Możemy teraz sformułować i udowodnić anonsowane na początku tego paragrafu twierdzenie o całce z supremum po trajektoriach submartyngału.

Twierdzenie 1. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedzie nieujemnym submartyngałem i $p > 1$. Wtedy

$$||X^*||_p \leqslant q \sup_n ||X_n||_p,$$

gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dowód. Jeśli $\sup_n ||X_n||_p = \infty$, teza jest oczywista. Załóżmy więc, że

$$\sup_n ||X_n||_p < \infty. \tag{2}$$

Zauważmy, że ciąg $(X_n)_n$ jest jednostajnie całkowalny, czyli

$$\lim_{M\to\infty} \int_{[X_n>M]} X_n\, dP = 0.$$

Istotnie, stosując nierówność Höldera, otrzymujemy

$$\int_{[X_n>M]} X_n\, dP = E\mathbf{1}_{[X_n>M]} X_n \leqslant ||\mathbf{1}_{[X_n>M]}||_q ||X_n||_p = (P[X_n > M])^{1/q} ||X_n||_p,$$

wystarczy więc wykazać, że

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n P[X_n > M] = 0. \tag{3}$$

Mamy z nierówności Markowa

$$P[X_n > M] \leqslant \frac{1}{M} EX_n \leqslant \frac{1}{M} \sup_n EX_n$$

i wobec $\sup_n EX_n \leqslant 1 + \sup_n ||EX_n||_p < \infty$ dostajemy (3).

Z jednostajnej całkowalności $(X_n)_n$ na podstawie twierdzenia Dooba o zbieżności wnosimy, że granica $X_\infty := \lim_n X_n$ istnieje i $(X_n)_n$ z dołaczoną zmienną losową X_∞ jest submartyngałem. Z lematu 2 dostajemy

$$\alpha P[X^* \geqslant \alpha] \leqslant \int_{[X^* \geqslant \alpha]} X_\infty.$$

Przyjmując więc w oznaczeniach lematu 1: $X = X_\infty$ oraz $Y = X^*$ zauważamy, że założenia lematu 1 dla tak zdefiniowanych X i Y sa spełnione, zatem zachodzi teza lematu 1, co daje

$$||X^*||_p \leqslant q||X_\infty||_p \leqslant q \sup_n ||X_n||_p$$

(ostatnia nierówność wynika z lematu Fatou).

□

Wniosek. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedzie nieujemnym submartyngałem i $p > 1$, oraz $\sup_n ||X_n||_p < \infty$. Wtedy $(X_n^p)_n$ jest jednostajnie całkowalnym submartyngałem.

Dowód. Rodzina $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczona z góry L_p zmienną losową X^*, co daje jednostajną całkowalność.

□

Z lematu 2 możemy także wyprowadzić tak zwana nierówność maksymalną Dooba.

Twierdzenie 2. Jeśli $(X_n)_n$ jest martyngałem, to dla każdego nieujemnego α

$$\alpha P[X^* \geqslant \alpha] \leqslant \sup_n ||X_n||_1.$$

Dowód. Niech $k \in \mathbb{N}$. Niech $Z_n^{(k)} = \min(|X_n|, k)$. $(Z_n^{(k)})_n$ jest submartyngałem jednostajne całkowalnym, do którego można dodać $Z_\infty^{(k)} := \lim_{n\to\infty} Z_n^{(k)}$. Na podstawie lematu 2 mamy

$$\alpha P[{Z^{(k)}}^* \geqslant \alpha] \leqslant ||Z_\infty^{(k)}||_1 = \sup_n ||Z_n^{(k)}||_1.$$

Ponieważ oba ciagi $(\alpha P[{Z^{(k)}}^*])_k$ oraz $(\sup_n ||Z_n^{(k)}||_1)_k$ są niemalejące, ich granice istnieją i nierówność dla granic zostaje zachowana. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (zastosowanej do prawej strony nierówności) jest to nierówność z tezy twierdzenia.

□