W tym wykładzie omówimy pojęcie przestrzeni zupełnej. Jedną z najważniejszych cech prostej rzeczywistej jest właśnie jej zupełność. Okazuje się, że jest to także własność wielu innych naturalntych przestrzeni metrycznych. Jest to własność metryczna, a nie topologiczna, tzn. istnieją przykłady przestrzeni metrycznych, które są homeomorficzne, ale jedna z nich jest zupełna, a druga nie.

PRZESTRZENIE METRYCZNE ZUPEŁNE

Niech (X, d) bedzie przestrzenią metryczną. Ciag $(x_n)_n$ punktów tej przestrzeni spełnia *warunek Cauchy'ego* (mówimy też, że *ciagiem Cauchy'ego*), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki indeks $N \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $m, n \geqslant N$ zachodzi nierówność $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Przestrzeń metryczną nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni ma granicę.

Przykładem przestrzeni metrycznej jest każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$, w szczególności prosta i płaszczyzna z metryką euklidesową. Jest to fakt dowodzony na kursie analizy i jedna z najważniejszych własności tych przestrzeni stale w analizie wykorzystywana.

Zauważmy najpierw, że każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej (dowolnej) spełnia warunek Cauchy'ego.

Twierdzenie 6. Niech (X, d) bedzie przestrzenią metryczną. Niech ciąg $(x_n)_n$ punktów z X bedzie zbieżny do pewnego punktu $x \in X$. Wtedy ciąg $(x_n)_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny do punktu x, więc z definicji zbieżności istnieje taki indeks N, że dla wszystkich $n \geqslant N$ zachodzi nierówność

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

Mamy więc dla $m, n \geqslant N$ z nierówności trójkąta:

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Niech (X, d) bedzie przestrzenią mmetryczną. Niech $A \subseteq X$. *Średnicą* zbioru A nazywamy supremum zbioru odległości pomiedzy punktami tego zbioru, tzn. liczbę

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Jedną z najważniejszych własności przestrzeni metrycznych zupełnych jest fakt, że przekroje malejących do zera ciągów zbiorów domknietych sa niepuste. Jest to treścią nastepującego twierdzenia Cantora.

Twierdzenie 7. Niech (X, d) bedzie zupełną przestrzenia metryczną oraz niech $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ bedzie ciągiem niepustych podzbiorów domkniętych tej przestrzeni, których średnice maleją do zera: $\delta(F_k) \to 0$. Wtedy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

Dowód. Niech $x_n \in F_n$. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\delta(F_n) \to 0$, więc istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $\delta(F_N) < \varepsilon$. Niech $m, n \geqslant N$. Mamy $x_m \in F_m \subseteq F_N$ oraz $x_m \in F_m \subseteq F_N$. Zatem

$$d(x_m, x_n) < \delta(F_N) < \varepsilon.$$

Zatem ciąg $(x_n)_n$ spenia warunek Cauchy'ego. Ponieważ (X, d) jest przestrzenia zupełną, więc ciąg ten ma granicę: $x_n \to x$. Ponieważ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu $(x_n)_n$ należą do F_k dla $n \geqslant k$ (bo $x_n \in F_n \subseteq F_k$), i zbiór F_k jest domknięty, więc $x \in F_k$. Zatem

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

skąd

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

□

TWIERDZENIE BAIRE'A

W matematyce często orzeka się o istnieniu pewnych, czasami bardzo egzotycznych obiektów. Zazwyczaj ich konstrukcja jest trudna i technicznie żmudna. Poniższe twierdzenie, tzw. twierdzenie Baire'a, jest środkiem dowodowym dla wykazywania bez specyficznej konstrukcji istnienia takich egzotycznych obiektów. Zanim je sformułujemy i udowodnimy, wprowadźmy jeszcze pojęcie zbioru nigdziegęstego. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy zbiorem *nigdziegęstym*, jeśli domknięcie zbioru A ma wnętrze puste.

Twierdzenie 8 (Baire'a). Suma przeliczalnie wielu zbiorów niegdziegęstych w przestrzeni metrycznej zupełnej nie może być całą przestrzenią, tzn. ma dopełnienie niepuste.

Dowód. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą nigdziegęstymi podzbiorami X. Niech $D_i = \mathrm{cl}(A_i)$. Ponieważ zbiór D_1 ma z założenia wnętrze puste, więc istnieje punkt x_1 poza D_1, czyli $x_1 \in X \setminus D_1$. Ponieważ dopełnienie D_1 jest zbiorem otwartym, więc istnieje takie r_1, że $B(x_1, r_1) \subset X \setminus D_1$. Oczywiscie możemy przyjąć, że $r_1 < 1$. Ponieważ zbiór D_2 nie ma wnętrza, więc kula otwarta $B(x, r_1/2)$ nie może być w całości zawarta w D_2 (bo byłaby wtedy jako zbiór otwarty częścią wnętrza). Niech więc $x_2 \in B(x_1, r_1/2) \setminus D_2$. Ponieważ zbiór $B(x_1, r_1/2) \setminus D_2$ jako różnica zbioru otwartego i domkniętego jest zbiorem otwartym, więc dla pewnego $r_2 > 0$ kula otwarta $B(x_2, r_2)$ jest jego podzbiorem: $B(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1/2) \setminus D_2$. Oczywiście możemy przyjąć $r_2 < 1/2$. Ponieważ zbiór D_3 nie ma wnętrza, więc kula otwarta $B(x, r_2/2)$ nie może być w całości zawarta w D_3. Niech więc $x_3 \in B(x_2, r_2/2) \setminus D_2$. Ponieważ zbiór $B(x_2, r_2/2) \setminus D_3$ jako różnica

zbioru otwartego i domkniętego jest zbiorem otwartym, więc dla pewnego $r_3 > 0$ kula otwarta $B(x_3, r_3)$ jest jego podzbiorem: $B(x_3, r_3) \subseteq B(x_2, r_2/2) \setminus D_3$. Oczywiście możemy przyjąć $r_3 < 1/3$. W ten sposób kontynuujemy wybór punktów x_n, ostatecznie dostając ciąg punktów: $x_1, x_2, \ldots$ oraz liczb: $r_1 < 1, r_2 < 1/2, r_3 < 1/3, \ldots$ takich, że dla każdego n:

$$B(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}/2) \setminus D_n \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq B(x_{n-2}, r_{n-2}/2) \setminus D_{n-1} \subseteq \ldots.$$

Zatem dla każdych $m < n$ mamy

$$x_n \in B(x_m, r_m/2) \subseteq B(x_m, r_m) \subseteq X \setminus D_m. \tag{1}$$

Zatem

$$d(x_n, x_m) < r_m < 1/m. \tag{2}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Niech $N > 1/\varepsilon$ i niech $n, m \geqslant N$ i $n > m$. Wtedy na podstawie (2)

$$d(x_n, x_m) < 1/m \leqslant 1/N < \varepsilon.$$

Zatem ciąg $(x_n)_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc, ponieważ (X, d) jest zupełna, ma w X granicę:

$$x_n \to x.$$

Ustalmy m. Z (1) dostajemy

$$x \in \mathrm{cl}(B(x_m, r_m/2)) \subseteq B[x_m, r_m/2] \subseteq B(x_m, r_m) \subseteq X \setminus D_m.$$

Ponieważ m było dowolne, więc

$$x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m,$$

a więc tym bardziej

$$x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Stąd

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \neq X.$$

$\square$.

Zbiory, które zawarte są w przeliczalnych sumach zbiorów domknietych bez wnętrza, nazywamy zbiorami *pierwszej kategorii*. Ich dopełnienia nazywamy zbiorami *rezydualnymi*. Topologicznie zbiory pierwszej kategorii uważamy za małe, bo nawet ich przeliczalne sumy w przestrzeniach zupełnych nie mogą dać całej przestrzeni (wynika to bardzo łatwo z twierdzenia Baire'a).

W serii zadań poniżej użyjemy twierdzenie Baire's do wykazania isnienia pewnego dziwnego obiektu, z którym na co dzień w naszej praktyce matematyczno-informatycznej raczej się nie spotykamy. Mianowicie udowodnimy istnienie funkcji ciągłej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, która nie jest monotoniczna, a więc ani słabo rosnąca, ani słabo malejąca, na żadnym pododcinku $[a, b] \subseteq [0, 1]$.

Zadanie 1. Pokazać, że $C[0, 1]$ z metryką z zadania 1.10 jest przestrzenią zupełną.

Zadanie 2. Niech $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Pokazać, że w przestrzeni $C[0,1]$ zbiór funkcji

$$R_{[a,b]} = \{f \in C[0,1] : f \text{ jest słabo rosnąca na odcinku } [a,b]\}$$

jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 3. Niech $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Pokazać, że w przestrzeni $C[0,1]$ zbiór funkcji

$$M_{[a,b]} = \{f \in C[0,1] : f \text{ jest słabo malejąca na odcinku } [a,b]\}$$

jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 4. Pokazać, że zbiory z zadań 1,2 mają wnętrza puste.

Wsk.: Dla dowolnej funkcji ciagłej $f : [0,1] \to [0,1]$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ skonstruować funkcję ciagłą $g : [0,1] \to [0,1]$ taką, że $d(f,g) < \varepsilon$ i g nie jest słabo monotoniczna na odcinku $[a,b]$. Można tę konstrukcję przeprowadzić tak, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in [0,a] \cup [b,1]$, zaś na odcinku $[a,b]$ zadbać o to, aby g nie była monotoniczna, ale jednocześnie, aby była blisko f.

Zadanie 5. Na podstawie poprzednich zadań oraz twierdzenia Baire'a wyciągnąć wniosek o istnieniu funkcji ciągłej $f : [0,1] \to [0,1]$, która nie jest słabo monotoniczna na żadnym odcinku $[a,b]$, gdzie liczby $a, b \in [0,1]$ sa wymierne.

Zadanie 6. Z zadania 5 wywnioskować, że istnieje funkcja ciągła $f : [0,1] \to [0,1]$, która nie jest słabo monotoniczna na żadnym odcinku $[a,b] \subseteq [0,1]$.