W tym wykładzie omówimy pojęcie przestrzeni zwartej. To kolejna własność topologiczna będąca uogólnieniem własności znanej z kursu analizy matematycznej.

PRZESTRZENIE METRYCZNE ZWARTE

Niech (X, d) bedzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że podzbiór K przestrzeni X jest zbiorem *zwartym*, jeśli każdy ciąg punktów $(x_n)_n$ z K posiada podciąg zbieżny $(x_{n_i})_i$ do punktu z K: $x_{n_i} \to x \in K$. Jeśli $K = X$, to mówimy o *przestrzeni zwartej*.

Pojęcie to jest silniejsze niż domkniętość zbioru.

Twierdzenie 9. Każdy zbiór zwarty w przestrzeni metrycznej jest domknięty.

Dowód. Niech (X, d) bedzie przestrzenią metryczną. Niech $K \subseteq X$ bedzie zbiorem zwartym. Niech $(x_n)_n$ bedzie ciągiem zbieżnym do pewnego punktu z przestrzeni X. Ciąg $(x_n)_n$ z K posiada podciąg zbieżny $(x_{n_i})_i$ do punktu z K: $x_{n_i} \to x \in K$. Ale podciąg jest zbieżny do tego samego punktu co cały ciąg, a zatem $z = x$ i $z \in K$.

□

Zadanie 1. Pokazać, że podzbiór domknięty zbioru zwartego jest zwarty.

Ważną własnością zbiorów zwartych jest to, że przekrój malejącego ciągu zbiorów zwartych jest niepusty.

Twierdzenie 10. Niech $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \ldots$ będzie ciagiem zwartych niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej. Wtedy

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

Dowód. Niech $x_n \in K_n$. Ciąg $(x_n)_n$ posiada podciąg zbieżny $(x_{n_i})_i$. Niech $x_{n_i} \to x$. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu należą do K_m. Ponieważ granica ciągu nie zależy od skończonej ilości początkowych wyrazów i każdy zbiór K_m jest domknięty, więc $x \in K_m$ dla każdego m.

□

Własność zwartości zachowuje się dla produktów.

Zadanie 2. Niech (X_1, d_1), (X_2, d_2) bedą przestrzeniami metrycznymi, a $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ zbiorami zwartymi. Wtedy $K_1 \times K_2$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni $X_1 \times X_2$.

Przez indukcję, powyższy fakt uogólnia się na dowolne skończone produkty.

Zadanie 3. Niech (X_i, d_i), $i \leqslant n$, bedą przestrzeniami metrycznymi, a $K_i \subseteq X_i$, $i \leqslant n$, zbiorami zwartymi. Wtedy $\prod_{i=1}^{n} K_n$ jest podzbiorem zwartym przestrzeni $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Okazuje się, że także dla produktów nieskończonych takie twierdzenie pozostaje nadal prawdziwe.

Zadanie 4. Niech (X_i, d_i), $i \in \mathbb{N}$ bedą przestrzeniami metrycznymi $d_i \leqslant 1$, a $K_i \subseteq X_i$, $i \leqslant n$ zbiorami zwartymi. Wtedy $\prod_{i=1}^{\infty} K_n$ jest podzbiorem zwartym przestrzeni $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

W znanych nam i najczęściej używanych przestrzeniach metrycznych, mianowicie w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$ zbiory zwarte mają szczególnie prosty opis.

Zaczniemy od pokazania, że odcinek na prostej rzeczywistej jest zwarty.

Twierdzenie 11. Odcinek domknięty jest zbiorem zwartym na $\mathbb{R}$.

Dowód. Niech $(x_n)_n$ będzie dowolnym ciagiem punktów z odcinka $I = [a, b]$. Wtedy przynajmniej jedna z połówek $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$, $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$ odcinka I zawiera wyrazy pewnego nieskończonego podciągu $(x_{n_i})_i$ wyjściowego ciągu. Niech będzie to np. I_1. Niech $y_1 = x_{n_1}$. I znów przynajmniej jedna z połówek odcinka I_1 musi zawierać wyrazy pewnego nieskończonego podciągu $(x_{n_{i_k}})_k$ ciągu $(x_{n_i})_i$. Niech tą połówką bedzie np. $I_{1,2} = [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}]$. Niech $y_2 = x_{n_{i_2}}$. w ten sposób dostajemy podciąg ciągu wyjściowego $(x_n)_n$, którego wszystkie wyrazy od $n - tego$ począwszy leża w odcinku o długości $(b-2)/2^n$. Zatem ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego, a ponieważ prosta rzeczywista jest przestrzenią zupełną, jest zbieżny do pewnego x. Ponieważ odcinek $[a, b]$ jest domknięty, więc $x \in [a, b]$. To kończy dowód zwartości odcinka $[a, b]$.

$\square$

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *ograniczony*, jeśli istnieje takie $r > 0$, że $A \subseteq B((0, \ldots, 0), r)$.

Zadanie 5. Pokazać, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *ograniczony*, jeśli istnieje takie $r > 0$, że $A \subseteq [-r, r]^n$.

Twierdzenie 12. Zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, najpierw, że K jest zwarty. Wiemy już, że w dowolnej przestrzeni metrycznej zbiór zwarty jest domknięty. Pozostaje pokazać, że K jest ograniczony. Jeśli tak by nie było, to dla kazdego $m \in \mathbb{N}$ istniałby punkt $x^{(m)}$ ze zbioru K, który leżałby poza kulą $B((0, \ldots, 0), m)$. Zatem odlegości $d_n(x^{(m)}, (0, \ldots, 0))$ dążą do nieskończoności. I tak byłoby dla każdego podciągu $(x^{(m_k)})_k$. Zatem żaden podciąg $(x^{(m_k)})_k)$ nie może być zbieżny do pewnego punktu x, bo wtedy odległości od środka układu współrzędnych jego wyrazów dążyłyby do odległości od środka układu współrzędnych punktu x:

$$\lim_{k\to\infty} d_n(x^{(m_k)}, (0, \ldots, 0)) = \lim_{k\to\infty} d_n(x^{(m_k)}, (0, \ldots, 0))$$

(pokazać to). Mamy tu sprzeczność.

($\Leftarrow$) Załóżmy teraz, że K jest ograniczony i domknięty. Ponieważ K jest ograniczony, więc istnieje takie $r > 0$, że $K \subseteq [-r, r]^n$. Jak wiemy, odcinki $[-r, r]$ są zwarte. Zatem ich produkt $[-r, r]^n$ też jest zwarty w metryce produktowej, a więc też i w metryce euklidesowej (bo zbieżność w jednej jest równoważna zbieżności w drugiej). Wiemy, że K jest domknięty, więc z zadania 1 dostajemy zwartość K.

$\square$

Zadanie 6. Pokazać że zbieżność ciągu w metryce produktowej (produkt metryk euklidesowych z prostej) w $\mathbb{R}^n$ jest równoważna ze zbieżnością w metryce euklidesowej w samej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.