W tym wykładzie zajmiemy się konstrukcją specjalnego podzbioru zwartego odcinka - tzw. *zbioru Cantora*. To jeden z podstawowych podzbiorów prostej o fundamentalnym znaczeniu dla całej matematyki. Występuje w różnych odsłonach i postaciach w analizie, topologii, rachunku prawdopodobieństwa czy teorii mnogości. Wielką popularnością cieszy się od wielu lat teoria fraktali. Otóż najbardziej podstawowym, wzorcowym fraktalem jest właśnie zbiór Cantora. Zapoznajmy się z tym bardzo ciekawym obiektem.

PRZESTRZENIE METRYCZNE ZWARTE -c.d.; TRÓJKOWY ZBIÓR CANTORA

Zbiór Cantora konstruujemy rekurencyjnie w następujący sposób.

Odcinek $I = [0,1]$ dzielimy na trzy równe odcinki (kazdy długości 3^{-1}: $I_0^{(1)} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $I_1^{(1)} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ $I_2^{(1)} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ odcinki i otwarty środkowy odcinek $\mathrm{int}(I_1^{(1)}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ usuwamy. Tak więc po drugim etapie konstrukcji mamy do czynienia ze zbiorem

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Zauważmy, że

$$I_i^{(1)} = [i3^{-1}, i3^{-1} + 3^{-1}].$$

W drugiej części konstrukcji dzielimy oba pozostałe odcinki $I_0^{(1)}$ oraz $I_2^{(1)}$ na trzy równe odcinki (kazdy długości 3^{-2}):

$$I_0^{(1)} = I_{0,0}^{(2)} \cup I_{0,1}^{(2)} \cup I_{0,2}^{(2)},$$

$$I_2^{(1)} = I_{2,0}^{(2)} \cup I_{2,1}^{(2)} \cup I_{2,2}^{(2)},$$

gdzie

$$I_{0,0}^{(2)} = \left[0, \frac{1}{9}\right],$$

$$I_{0,1}^{(2)} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right],$$

$$I_{0,2}^{(2)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right],$$

oraz

$$I_{2,0}^{(2)} = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right],$$

$$I_{2,1}^{(2)} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right],$$

$$I_{2,0}^{(2)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

i usuwamy centralne odcinki otwarte, tzn.

$$\mathrm{int}(I_{0,1}^{(2)}) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),$$

$$\mathrm{int}(I_{2,1}^{(2)}) = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Tak więc po drugim etapie konstrukcji mamy do czynienia ze zbiorem

$$C_2 = I_{0,0}^{(2)} \cup I_{0,2}^{(2)} \cup I_{0,2}^{(2)} \cup I_{0,2}^{(2)} = \bigcup_{i_1, i_2 \in \{0,2\}} I_{i_1,i_2}^{(2)}.$$

Zauważmy, że

$$I_{i_1,i_2}^{(2)} = \left[i_1 3^{-1} + i_2 3^{-2}, i_1 3^{-1} + i_2 3^{-2} + 3^{-2}\right].$$

Załóżmy teraz, że jesteśmy po n-tym etapie konstrukcji na tym etapie powstał zbiór

$$C_n = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,2\}} I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(n)},$$

gdzie odcinki $I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(n)}$ są postaci

$$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(n)} = \left[\sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j}, \sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 3^{-n}\right].$$

W $n+1$-szym etapie konstrukcji każdy z tych odcinków dzielimy na trzy odcinki o równej długości

$$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{(n)} = I_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}^{(n+1)} \cup I_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1}^{(n+1)} \cup I_{i_1,i_2,\ldots,i_n,2}^{(n+1)},$$

gdzie

$$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}^{(n+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j}, \sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 3^{-(n+1)}\right],$$

$$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1}^{(n+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 3^{-(n+1)}, \sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 2 \cdot 3^{-(n+1)}\right],$$

$$I^{(n+1)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,2} = \left[\sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 2\cdot 3^{-(n+1)}, \sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 3^{-n}\right].$$

Ponownie usuwamy centralne odcinki otwarte, tzn. odcinki

$$\mathrm{int}(I^{(n+1)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1}) = \left(\sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 3^{-(n+1)}, \sum_{j=1}^{n} i_j 3^{-j} + 2\cdot 3^{-(n+1)}\right).$$

Zatem po $n+1$-szym etapie konstrukcji pozostał zbiór

$$C_{n+1} = \bigcup_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}\in\{0,2\}} I^{(n+1)}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}.$$

Trójkowy zbiór Cantora definiujemy jako przekrój wszystkich zbiorów C_n lub, innymi słowy, to co zostało z odcinka $[0,1]$ po wyrzuceniu wszystkich centralnych zbiorów otwartych na wszystkich etapach konstrukcji:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Twierdzenie 16. Zbiór Cantora C jest zbiorem zwartym, ma puste wnętrze i jest zbiorem mocy continuum.

Dowód. Każdy zbiór C_n jest sumą skończonej liczby zbiorów domkniętych, a więc jest domknięty. Przekrój zaś dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty, a zatem C jest domknięty, a więc, jako ograniczony podzbiór przestrzeni euklidesowej, jest zwarty.

Zauważmy, że w zbiorze C_n nie zawiera się żaden odcinek otwarty o długosci większej niż 3^{-n}. Zatem w zbiorze C nie zawiera się żaden odcinek otwarty, a stąd wynika już, że $\mathrm{int}(C) = \emptyset$.

Jeśli $x \in C$, to dla każdego n $x \in I^{(n)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ dla pewnych $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,2\}$. Ponieważ dla $n+1$ jedynymi odcinkami postaci $I^{(n+1)}_{j_1,j_2,\ldots,j_n,j_{n+1}}$, do których może należeć x są (rozłączne) odcinki $I^{(n+1)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}$ oraz $I^{(n+1)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,2}$, więc istnieje dokładnie jeden ciąg nieskończony $i_1, i_2, \ldots \in \{0,2\}$ taki, że $x \in I^{(n)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ dla każdego n. Ponieważ długości tych odcinków dążą do zera, a każdy inny punkt y ze zbioru C jest oddalony od x o pewną dodatnią odległość, więc

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \{x\}. \tag{1}$$

Zatem każdemu punktowi $x \in C$ odpowiada różnowartościowo ciąg nieskończony złożony z zer i dwójek. Również każdemu takiemu ciągowi $i_1, i_2, \ldots$ odpowiada dokładnie jeden punkt ze zbioru C. Wynika to z faktu, że odcinki $I^{(n)}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ tworzą ciąg schodzący, a więc z twierdzenia Cantora (tw. 7) ich przekrój jest niepusty i zachodzi (1). Mamy więc wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami zbioru Cantora i ciągami zero-dwójkowymi. Ponieważ takich ciągów jest contininuum, to taka też jest moc zbioru Cantora.

□