W tym wykładzie omówimy pojecie funkcji mierzalnej wzgledem σ-algebry. Jest to daleko idące uogólnienie pojęcia ciagłości funkcji znanego z analizy i części topologicznej tego wykładu.

Funkcje mierzalne

Przestrzenią mierzalną nazywamy parę $(X, \mathcal{F})$, gdzie X jest dowolnym zbiorem, a $\mathcal{F}$ σ-algebrą podzbiorów X. Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy $\mathcal{F}$*-mierzalną*, lub, gdy σ-algebra $\mathcal{F}$ jest ustalona, po prostu *mierzalną*, jeśli przeciwobraz $f^{-1}[(a, b)]$ dowolnego odcinka otwartego jest elementem σ-algebry $\mathcal{F}$. Rodzinę funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych na X oznaczamy $Mes(\mathcal{F})$. Gdy X jest przestrzenią metryczną, a $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$ jest σ-algebrą podzbiorów borelowskich X, funkcje mierzalne nazywamy funkcjami *borelowsko mierzalnymi* lub po prostu *borelowskimi*.

Zadanie 1. Niech $(X, \mathcal{F})$ bedzie przestrzenią mierzalną. Pokazać, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[(a, b)] \in \mathcal{F}$ dla każdych dwóch liczb wymiernych $a < b$.

Zadanie 2. Niech $(X, \mathcal{F})$ bedzie przestrzenią mierzalną. Pokazać, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[(-\infty, a)] \in \mathcal{F}$ dla każdej liczby wymiernej $a < b$.

Zadanie 3. Pokazać, że w definicji funkcji mierzalnej odcinek otwarty (a, b) możemy zastapić przez odcinek domknięty $[a, b]$, a także, że w zadaniu 1 zamiast rozważać odcinek otwarty o końcach wymiernych, możemy rozważać odcinek domknięty oraz że w zadaniu 2 zamiast półprostej otwartej możemy mówić o półprostej domkniętej, a także, że półproste dolne można zastąpić przez półproste górne $((a, \infty), [a, \infty))$.

Zadanie 4. Niech $(X, \mathcal{F})$ bedzie przestrzenią mierzalną. Pokazać, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ dla każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Funkcje mierzalne zachowują się "przyzwoicie" ze względu na operacje algebraiczne. Kolejne twierdzenia pokazują zamkniętość klasy $Mes(\mathcal{F})$ na dodawanie i mnożenie funkcji.

Wprowadźmy następujące oznaczenia (typowe dla rachunku prawdopodobieństwa). Niech $f : X \to \mathbb{R}$. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$[f \in A] := \{x \in X : f(x) \in A] = f^{-1}[A],$$

$$[f < a] := \{x \in X : f(x) < a] = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

$$[f \leqslant a] := \{x \in X : f(x) \leqslant a] = f^{-1}[(-\infty, a]] \text{ itp.}$$

Twierdzenie 21. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Jeśli $f, g \in Mes(\mathcal{F})$, wtedy także $f + g \in Mes(\mathcal{F})$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że dla $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$[f + g < \alpha] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} ([f < q] \cap [g < \alpha - q]). \tag{1}$$

Niech x należy do zbioru po prawej stronie dowodzonej równości. Wtedy istnieje takie q, że

$$f(x) < q$$
$$g(x) < \alpha - q.$$

Dodając stronami, otrzymujemy nierówność

$$f(x) + g(x) < \alpha,$$

a więc x należy także do zbioru po lewej stronie (1).

Załóżmy teraz, że x należy do zbioru po lewej stronie (1).Wtedy

$$f(x) < \alpha - g(x).$$

Niech q bedzie liczba wymierną należącą do odcinka $(f(x), \alpha - g(x))$.Wtedy $g(x) < \alpha - q$. Zatem dla tak dobranej liczby wymiernej q mamy

$$x \in [f < q] \cap [g < \alpha - q],$$

a więc x należy też do prawej strony równości (1).

Zatem istotnie (1) zachodzi. Składniki sumy po prawej stronie równości są zbiorami z $\mathcal{F}$ z założenia mierzalności funkcji f i g, a suma po liczbach wymiernych jest przeliczalna, a więc zbiór $[f + g < \alpha]$ jest w $\mathcal{F}$, bo $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą. Zatem, wobec dowolności $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$ jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną.

□

Lemat 1. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Jeśli $f \in Mes(\mathcal{F})$, wtedy także $f^2 \in Mes(\mathcal{F})$.

Dowód. Jeśli $\alpha \leqslant 0$, to zbiór $[f^2 < \alpha]$ jest pusty, a więc należy do $\mathcal{F}$.

Załóżmy, że $\alpha > 0$. Wtedy

$$[f^2 < \alpha] = [f > -\sqrt{\alpha}] \cap [f < \sqrt{\alpha}].$$

Z mierzalności f $[f < \sqrt{\alpha}] \in \mathcal{F}$ i także $[f > -\sqrt{\alpha}] = [f \leqslant -\sqrt{\alpha}]^c \in \mathcal{F}$, a ponieważ przekrój dwóch zbiorów z σ-algebry należy do tej σ-algebry, więc $[f^2 < \alpha] \in \mathcal{F}$.

□

Zadanie 5. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną, to także $\alpha \cdot f$ jest $\mathcal{F}$-mierzalną.

Twierdzenie 22. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Jeśli $f, g \in Mes(\mathcal{F})$, wtedy także $f \cdot g \in Mes(\mathcal{F})$.

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 21, lematu 1, zadania 5 oraz następującej tożsamości:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2).$$

□

Inną cechą klasy funkcji mierzalnych jest zamkniętość na przejścia graniczne.

Twierdzenie 23. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $f_1, f_2, \ldots$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych, dla których w każdym punkcie $x \in X$ istnieje rzeczywisty kres górny $I(x) = \inf_n f_n(x)$. Wtedy I też jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną.

Dowód. Teza wynika natychmiast z następującej równości:

$$[I < \alpha] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n < \alpha].$$

□

Analogicznie dowodzimy nastepujące twierdzenie, gdzie infimum zastąpione jest przez supremum.

Twierdzenie 24. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $f_1, f_2, \ldots$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych, dla których w każdym punkcie $x \in X$ istnieje rzeczywisty kres górny $S(x) = \sup_n f_n(x)$. Wtedy S też jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną.

Twierdzenie 24. Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $f_1, f_2, \ldots$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych, który ma granicę punktową

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Wtedy także funkcja f jest $\mathcal{F}$-mierzalna.

Dowód. Granica ciągu jest równa jego granicy górnej. Mamy zatem

$$f(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \geqslant n} f_n(x),$$

i teraz już teza wynika z dwóch poprzednich twierdzeń.

□