

# Matematyka dyskretna

Informatyka algorytmiczna, WIT PWr  
semestr letni 2023/2024

## Rozgrzewka

Niech  $k, n \in \mathbb{N}$  oraz  $x, y \in \mathbb{R}$ . Przez  $[n]$  oznaczamy zbiór  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , przez  $P(A)$  oznaczamy zbiór potęgowy zbioru  $A$ .

- silnia dolna:  $x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1)$ ,  $x^{\underline{0}} = 1$
- silnia górna:  $x^{\overline{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1)$ ,  $x^{\overline{0}} = 1$
- symbol Newtona:  $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$
- dwumian Newtona:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

**Zad. 1** — Na ile sposobów można ustawić 8 osób w szeregu? A na ile w kółku?

**Zad. 2** — Na ile sposobów można na szachownicy ustawić 8 wież tak, aby żadne dwie się nie biły, jeśli wieże są nierozróżnialne? A na ile, jeśli są rozróżnialne?

**Zad. 3** — Przyjmijmy, że kod PIN może być dowolnym układem czterech cyfr. Ile jest PIN-ów, w których jakaś cyfra się powtarza?

**Zad. 4** — Rozważmy wszystkie ciągi długości  $n$  o wyrazach  $P, I, K, A, C, H, U$ . Ile jest wszystkich takich ciągów? Ile takich, w których żadna litera nie występuje 2 razy pod rząd? Ile takich, że wśród każdych kolejnych 7 wyrazów występuje wszystkie siedem liter?

**Zad. 5** — Znajdź liczbę dzielników liczby 6000.

**Zad. 6** — Na płaszczyźnie jest 12 punktów. Ile trójkątów wyznaczają te punkty, jeśli żadne trzy nie są współliniowe? A ile, jeśli 5 punktów leży na jednej prostej, a poza tym żadne trzy nie są współliniowe?

**Zad. 7** — Na ile sposobów można przejść po kracie  $5 \times 8$  poruszając się tylko w górę lub w prawo?

**Zad. 8** — Wyznacz moc zbioru  $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k\}$ .

**Zad. 9** — Ile razy wykonywana jest operacja OP wewnątrz poniższej pętli?

```
for i=1 to n do
  for j=i to n do
    OP(i,j)
```

**Zad. 10** — Oblicz  $n^{\underline{n}}$ ,  $1^{\overline{n}}$ ,  $(-1)^{\underline{k}}$ ,  $\binom{-1}{k}$ ,  $\binom{-1/2}{k}$ .

**Zad. 11** — Ile jest funkcji częściowych ze zbioru  $n$  elementowego w zbiór  $m$  elementowy? (Funkcja częściowa z  $X$  w  $Y$  to funkcja  $f : X' \rightarrow Y$ , gdzie  $X' \subseteq X$ .)

**Zad. 12** — Wyznacz moc zbiorów  $\{(A, B) \in P([n])^2 : A \subseteq B\}$  oraz  $\{(A, B, C) \in P([n])^3 : A \subseteq B \subseteq C\}$ .

**Zad. 13** — Niech  $X_i = [n] \times \{i\}$  dla  $i \in [n]$ . Wyznacz moc zbioru  $S_n = \{A \in P([n] \times [n]) : (\forall i \in [n])(A \cap X_i \neq \emptyset)\}$ . Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n|/2^{n^2}$ .

## Współczynniki dwumianowe

**Zad. 1** — Znajdź wszystkie liczby naturalne  $a, b, c$  takie, że  $\binom{a}{b} \binom{b}{c} = 2 \binom{a}{c}$ .

**Zad. 2** — Oblicz  $\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \dots + \binom{101}{50}$  oraz  $\binom{101}{1} + \binom{101}{3} + \binom{101}{5} + \dots + \binom{101}{101}$ .

**Zad. 3** — Ile jest podzbiorów mocy parzystej zbioru  $n$ -elementowego?

**Zad. 4** — Pokaż, że iloczyn  $k$  kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez  $k!$ .

**Zad. 5** — Niech  $j, k, n \in \mathbb{N}$ . Przedstaw dowód kombinatoryczny oraz algebraiczny tożsamości

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

**Zad. 6** — Uogólnij rozwiązanie zadania 7 z poprzedniej listy na kratę  $k \times m$ . Wykorzystaj to zadanie do udowodnienia tożsamości Pascala dla  $k, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

**Zad. 7** — Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Policz na dwa sposoby, ile jest możliwości wyboru trzech rozdziałów z książki mającej ich  $n+1$ , aby udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Wyprowadź z niej wzór na sumę kwadratów. Uogólnij ją tak, by otrzymać wzór na  $\binom{n+1}{m+1}$ , gdzie  $m \in \mathbb{N}$ .

**Zad. 8** — Znajdź zwartą postać sum  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$  oraz  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$ .

**Zad. 9** — Znajdź zwartą postać sumy  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2$ .

**Zad. 10** — Wyznacz  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$ .

*Wskazówka: Skorzystaj z tego, że  $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ .*

**Zad. 11** — Zapisz za pomocą jednego symbolu Newtona  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

**Zad. 12** — Załóżmy, że  $p$  jest liczbą pierwszą oraz  $0 < k < p$ .

1. Pokaż, że  $p \mid \binom{p}{k}$ .
2. Pokaż, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą oraz  $a, b \in \mathbb{N}$ , to  $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p) \pmod{p}$ .
3. Wyprowadź z poprzedniego podpunktu Małe Twierdzenie Fermata.

**Zad. 13** — Ile rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych ma równanie  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$ ? A ile w zbiorze liczb całkowitych dodatnich?

**Zad. 14** — Znajdź liczbę czwórek  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  liczb całkowitych nieujemnych, które spełniają warunek  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq n$ .

**Zad. 15** — Ile jest rozmieszczeń uporządkowanych  $k$  różnych elementów w  $n$  różnych pudełkach (pudełko może być puste, kolejność elementów w pudełku ma znaczenie)?

**Zad. 16** — Ile jest funkcji rosnących  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ?

## Wzór włączeń i wyłączeń / Zasada szufladkowa Dirichleta

- Wzór włączeń i wyłączeń. Dla zbiorów skończonych  $A_1, A_2, \dots, A_n$  prawdą jest, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

**Zad. 1** — Policz, ile jest liczb pierwszych mniejszych od 100.

**Zad. 2** — Niech  $n \geq 1$ . Funkcja Eulera  $\varphi(n)$  liczy, ile jest liczb naturalnych w zbiorze  $[n]$  względnie pierwszych z  $n$ . Pokaż, że jeśli  $n$  jest iloczynem trzech różnych liczb pierwszych  $n = pqr$ , to  $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})(1 - \frac{1}{r})$ .

**Zad. 3** — Znajdź liczbę ciągów długości  $2n$  takich, że każda liczba  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  występuje dokładnie dwa razy, przy czym żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe.

**Zad. 4** — Nieporządkiem  $n$ -elementowego zbioru nazywamy bijekcję  $f: [n] \rightarrow [n]$  taką, że dla każdego  $i \in [n]$  mamy  $f(i) \neq i$ . Wyznacz  $D_n$  - liczbę nieporządków  $n$ -elementowego zbioru. Następnie oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!}$ .

**Zad. 5** — Udowodnij, że na Facebooku muszą istnieć dwie osoby, które mają taką samą liczbę znajomych (zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna, oraz że na Facebooku jest zarejestrowana więcej niż jedna osoba).

**Zad. 6** — Niech  $A$  będzie ustalonym dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru  $\{1, 2, \dots, 50\}$ . Udowodnij, że w zbiorze  $A$  istnieją dwa różne pięcioelementowe podzbiory takie, że sumy wszystkich elementów każdego z nich są równe.

**Zad. 7** — Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą, niekoniecznie różnymi, liczbami całkowitymi. Pokaż, że suma pewnych spośród nich jest wielokrotnością liczby  $n$ .

## Szacowanie sum, liczby harmoniczne, wzór Stirlinga

- $n$ -ta liczba harmoniczna:  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ,  $H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$ ,  $\gamma \approx 0.5772$  - stała Eulera-Mascheroniego
- Funkcja dzeta Riemanna dla  $r \in \mathbb{C}$  takich, że  $\operatorname{Re}(r) > 1$ :  $\zeta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ .
- Wzór Stirlinga:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

**Zad. 1** — Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu funkcji  $f(n) = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ .

**Zad. 2** — Znajdź oszacowania górne i dolne  $\zeta(r)$  dla  $r \in (1, \infty)$ . Skorzystaj z metody omówionej na wykładzie.

**Zad. 3** — Pokaż, bez zastosowania indukcji matematycznej, że

- 1)  $\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$ ,
- 2)  $\sum_{k=2}^n \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n}$ .

**Zad. 4** — Przedstaw sumy

- 1)  $\sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k}$
- 2)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$
- 3)  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

za pomocą liczb harmonicznych. Zbadaj ich asymptotykę.

**Zad. 5** — Pokaż, że  $H_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k}$ .

*Wskazówka: Oblicz całkę  $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$ .*

**Zad. 6** — Oblicz  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{10^n}$ .

*Wskazówka: Rozwińcie funkcję  $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$  w szereg Taylora w punkcie 0 to  $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ . Przemnóż ten szereg przez szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .*

**Zad. 7** — Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych  $k \leq n$  mamy

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

*Wskazówka: Przypomnij sobie, że  $e^x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}$ .*

**Zad. 8** — Zastosuj wzór Stirlinga do wyznaczenia przybliżeń liczb  $\binom{2n}{n}$  oraz  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

**Zad. 9** — Pokaż, że  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}$ . Z czym kojarzysz to wyrażenie?

**Zad. 10** — Funkcję specjalną gamma definiuje się następująco

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Rozszerza ona pojęcie silni na liczby rzeczywiste, a nawet zespolone. Jeżeli część rzeczywista liczby  $x$  jest dodatnia, to całka ta jest zbieżna bezwzględnie.

1. Oblicz  $\Gamma(1)$ .
2. Całkując przez części pokaż, że  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
3. Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Wyraź  $n!$  za pomocą funkcji gamma.
4. Oblicz  $\Gamma(1/2)$ .

## Liczby Stirlinga II rodzaju, liczby Bella

- Liczby Stirlinga II rodzaju (liczba podziałów zbioru mocy  $n$  na  $k$  niepustych podzbiorów).  
Dla  $k, n > 0$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1.$$

- Liczby Bella (liczba partycji zbioru mocy  $n$ ):  $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .  
Dla  $n \geq 0$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1.$$

**Zad. 1** — Niech  $n \geq 3$ . Udowodnij, że funkcji “na”  $f: A \rightarrow B$ , gdzie  $|A| = n$ ,  $|B| = 3$ , jest  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ . Podaj wzór na  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$ .

**Zad. 2** — Niech  $|X| = n$ ,  $|Y| = k$ . Przypomnij z wykładu wzór na liczbę surjekcji (funkcji “na”)  $f: X \xrightarrow{na} Y$ . Wyraż liczbę surjekcji wykorzystując liczbę Stirlinga drugiego rodzaju. Podaj wzór na  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .

**Zad. 3** — Ile jest liczb 13-cyfrowych takich, że każda cyfra występuje w nich choć raz?

**Zad. 4** — Niech  $m, n \in \mathbb{N}$ . Udowodnij, że

$$\left\{ \begin{matrix} n+m+1 \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^m k \cdot \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\}.$$

**Zad. 5** — Niech  $m, n \in \mathbb{N}$ . Uzasadnij, że

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}.$$

Wykorzystaj tę tożsamość do uzasadnienia zależności rekurencyjnej dla liczb Bella.

**Zad. 6** — Niech  $n, k \in \mathbb{N}$ . Uzasadnij, że

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{r_i \geq 1 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} / k!.$$

**Zad. 7** — Pokaż, że  $B_n < n!$  dla  $n > 2$ .

**Zad. 8** — Narysuj wykresy ciągów

$$\frac{(\ln B_n)/n}{\ln n - \ln \ln n} \quad \text{oraz} \quad \frac{\ln(n+1)B_n^{1/n}}{n}$$

dla  $n = 2, 3, \dots, 1000$ . Spróbuj z analizy wykresów wyciągnąć jakieś wnioski na temat asymptotyki liczb Bella.

## Permutacje

- Rząd permutacji  $\sigma \in S_n$  to najmniejsza dodatnia liczba  $k$  taka, że  $\sigma^k = id$ .
- Wektor inwersji permutacji  $\sigma \in S_n$  to  $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , gdzie  $v_i = |\{k \in [n] : k < i \wedge \sigma(k) > \sigma(i)\}|$  dla  $i \in [n]$ .

**Zad. 1** — Niech  $\sigma \in S_n$ . Jak zmieni się  $\sigma$  po złożeniu z transpozycją  $\tau = (i j)$  z prawej strony ( $i \neq j$ )? A jak po złożeniu z  $\tau$  z lewej strony? Pokaż, że złożenie z transpozycją zmienia znak permutacji, tzn.  $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\tau \circ \sigma) = -sgn(\sigma)$ . Następnie pokaż, że dla  $\sigma, \pi \in S_n$  mamy  $sgn(\sigma \circ \pi) = sgn(\sigma)sgn(\pi)$ .

**Zad. 2** — Udowodnij, że dowolną transpozycję  $(i j)$  z  $S_n$  ( $i \neq j$ ) da się przedstawić jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich  $(i i + 1)$ .

**Zad. 3** — Niech  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ . Wyznacz rozkład  $\sigma$  na cykle. Znajdź znak  $\sigma$ , przedstaw ją jako złożenie transpozycji, przedstaw ją jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich i wyznacz jej wektor inwersji.

**Zad. 4** — Permutacja  $\sigma \in S_n$  ma rozkład na  $k$  rozłącznych cykli mocy  $c_1, \dots, c_k$ . Wyznacz znak i rząd  $\sigma$ .

**Zad. 5** — Inwolucją nazywamy permutację  $\sigma \in S_n$  taką, że  $\sigma^2 = id$ . Znajdź liczbę inwolucji z  $S_n$  nie mających punktów stałych.

**Zad. 6** — Jaka jest średnia liczba punktów stałych w permutacji z  $S_n$ ?

**Zad. 7** — Ustalmy liczbę  $n > 1$ .

1. Pokaż, że funkcja  $sgn : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$  jest epimorfizmem (homomorfizmem “na”) grup  $(S_n, \circ)$  oraz  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ .
2. Wyznacz jądro odwzorowania  $sgn$ .
3. Wyznacz moc jądra odwzorowania  $sgn$ .

**Zad. 8** — Czy absolutnie roztargniona sekretarka ma większą szansę na włożenie choćby jednego listu do właściwej koperty, gdy ma ona do wysłania 5 listów, czy wówczas, gdy ma do wysłania 6 listów?

**Zad. 9** — Na ile sposobów można ustawić na szachownicy 8 jednakowych wież tak, aby żadne dwie się nie biły, a ponadto żadna z nich nie znajdowała się na przekątnej  $A1 - B2 - \dots - H8$ ?