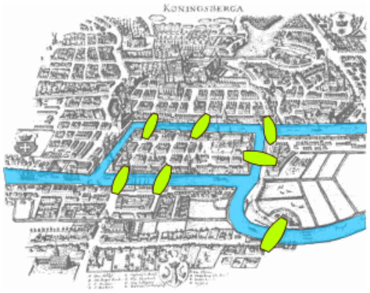
Wprowadzenie do teorii grafów

Informatyka algorytmiczna, WIiT PWr
semestr zimowy 2024/2025

Rozgrzewka

Definicja 1 ***Grafem prostym G*** *nazywamy uporządkowaną parę zbiorów rozłącznych* (V, E) *takich, że* E *jest podzbiorem zbioru* $V^{[2]}$*, gdzie* $V^{[2]}$ *to zbiór wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru* V*.*
V *to zbiór wierzchołków grafu* G*, zaś* E *to zbiór krawędzi grafu* G*.*



Rysunek 1: Mapa mostów królewieckich
Źródło: *https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg*

Zad. 1 — Ile jest różnych grafów prostych o zbiorze wierzchołków $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ (podaj przybliżoną wartość dla $n = 10$ i $n = 20$)? Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?

Zad. 2 — *W* grafie prostym stopniem wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi, do których ten wierzchołek należy. Czy istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym stopnie wszystkich wierzchołków są parami różne?

Zad. 3 — Czy suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie prostym może być nieparzysta?

Zad. 4 — Udowodnij, że wśród 6 osób zawsze znajdziemy 3 osoby, które sie znają lub 3 osoby, które się nie znają (zakładamy, że relacje znajomości i nieznajomości są symetryczne).

Zad. 5 — Ile maksymalnie krawędzi może mieć graf o 5 wierzchołkach, który nie posiada trójkątów? (Graf $G = (V, E)$ posiada trójkąt, jeśli istnieją wierzchołki v, w, z takie, że $\{v, w\}, \{w, z\}, \{z, v\} \in E$.) Czy da się ten graf narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały? Odpowiedz na te same pytania dla grafu o 6 wierzchołkach.

Zad. 6 — Alicja musi przewieźć na drugi brzeg rzeki owcę, wilka i kapustę. Posiada łódkę, która może pomieścić tylko ją i jedno z trzech (owcę, wilka albo kapustę). Na jednym brzegu nie mogą zostać bez opieki Alicji: wilk z owcą, ani owca z kapustą (dlaczego?).

1. Poradź Alicji, jak przeprawić się na drugi brzeg.
2. Obejrzyj River Crossings (and Alcuin Numbers) - Numberphile.
3. Jaki związek ma powyższy problem z zagadnieniem minimalnego pokrycia wierzchołkowego?

Zad. 7 — Czy da się zaplanować spacer po Królewcu tak, by przejść przez wszystkie mosty, przez każdy tylko jeden raz i wrócić do punktu wyjścia (Rysunek 1)? Czy da się zaplanować spacer tak, by przejść przez wszystkie mosty i przez każdy tylko jeden raz?

Lista 1

Zad. 1 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym bez trójkątów. Uzasadnij, że jeżeli $v, w \in V$ oraz $\{v, w\} \in E$, to zachodzi $\deg(v) + \deg(w) \leq |V|$.

Zad. 2 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Uzasadnij, że

$$\sum_{\{v,w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} \deg(v)^2.$$

Zad. 3 — Hiperkostką k-wymiarową Q_k ($k \geq 1$) nazywamy graf, którego wierzchołkami są wszystkie ciągi zero-jedynkowe długości k, zaś krawędzie łączą te pary ciągów, które różnią się na dokładnie jednej pozycji.

1. Narysuj Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.
2. Wyznacz liczbę wierzchołków, stopnie wierzchołków oraz liczbę krawędzi w Q_k.
3. Wyznacz średnicę Q_k.
4. Pokaż, że Q_k jest dwudzielny.

Zad. 4 — Pokaż, że grafy Q_2 oraz $K_{2,2}$ są izomorficzne. Wyznacz wszystkie grafy proste o 4 wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zad. 5 — Uzasadnij, że grafy dwudzielne nie posiadają trójkątów. Czy każdy graf bez trójkątów jest grafem dwudzielnym?

Zad. 6 — Rozstrzygnij, czy następujące ciągi są graficzne i jeśli ciąg jest graficzny, to podaj przykład grafu prostego o tym ciągu stopni:

1. $(4, 3, 2, 1, 0)$,
2. $(4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$,
3. $(6, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$.

Zad. 7 — Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów o tym samym ciągu stopni wierzchołków.

Zad. 8 — Udowodnij, że graf dwudzielny o n wierzchołkach ma co najwyżej $n^2/4$ krawędzi.

Zad. 9 — Udowodnij, że każdy graf realizujący górne ograniczenie w twierdzeniu Mantela jest izomorficzny z grafem $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.
Wskazówka: Rozpocznij rozważania od wierzchołka o największym stopniu.

Zad. 10 — Udowodnij, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Zad. 11 — Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G jest spójny lub jego dopełnienie $\overline{G}$ jest spójne. Podaj przykład takiego grafu, że zarówno G jak i $\overline{G}$ są grafami spójnymi.

Zad. 12 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o n wierzchołkach i k składowych. Udowodnij, że liczba jego krawędzi spełnia nierówność

$$n - k \leq |E| \leq \binom{n-k+1}{2}.$$

Wskazówka: Dla dolnego ograniczenia rozważ dowód przez indukcję względem liczby krawędzi. Dla górnego ograniczenia: rozważ składowe C_1 i C_2 będące grafami pełnymi takie, że $|C_1| \geq |C_2|$; jak zmieni się liczba krawędzi, jeśli C_1 i C_2 zastąpimy grafami pełnymi mającymi, odpowiednio, $|C_1|+1$ i $|C_2|-1$ wierzchołków?

Lista 2

Zad. 1 — Niech $G = (V, E, \gamma)$ oraz $e \in E$. Pokaż, że e nie jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy e występuje w cyklu.

Zad. 2 — Udowodnij, że jeśli G jest parzysty, to G nie posiada mostu. Czy implikacja odwrotna jest prawdziwa?

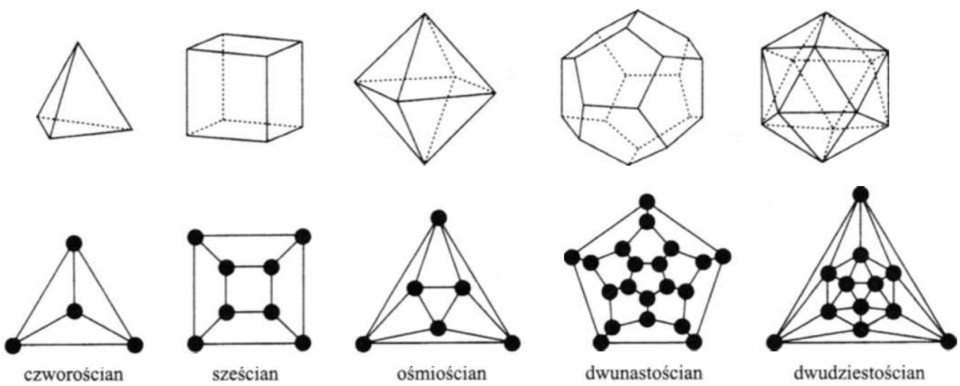
Zad. 3 — Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie grafem ogólnym takim, że stopień każdego wierzchołka jest parzysty. Pokaż, że zbiór krawędzi grafu G można podzielić na cykle rozłączne krawędziowo.
Wskazówka: Możesz rozpocząć rozważania od skonstruowania drogi maksymalnej.

Zad. 4 — Podaj przykład grafu

1) jednocześnie eulerowskiego i hamiltonowskiego,
2) hamiltonowskiego, ale nie eulerowskiego,
3) eulerowskiego, ale nie hamiltonowskiego.

Zad. 5 — Niech $m, n \in \mathbb{N}^+$. Dla jakich wartości m i n graf pełny dwudzielny $K_{m,n}$ jest eulerowski/półeulerowski/hamiltonowski/półhamiltonowski?

Zad. 6 — Poniżej przedstawiono *grafy platońskie* utworzone z wierzchołków i krawędzi pięciu wielościanów foremnych. Które są eulerowskie/hamiltonowskie?



Rysunek 2: Grafy platońskie
Źródło: *R.J. Wilson, Wprowadzenie do teorii grafów, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007*

Zad. 7 — Niech $n \geq 3$ będzie nieparzyste. Podaj przykład grafu prostego o n wierzchołkach, który nie jest hamiltonowski, a dla którego mamy $\deg(v) \geq (n-1)/2$ dla każdego wierzchołka.
(Porównaj z twierdzeniem Diraca.)

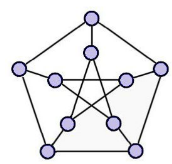
Zad. 8 — Podaj przykład grafu prostego o $n \geq 3$ wierzchołkach, który nie jest hamiltonowski, a dla którego mamy $\deg(v) + \deg(w) \geq n - 1$ dla każdej pary nieincydentnych wierzchołków.
(Porównaj z twierdzeniem Orego.)

Zad. 9 — Niech graf G ma n wierzchołków i $\binom{n-1}{2} + 2$ krawędzi. Udowodnij, że G jest hamiltonowski. Podaj przykład niehamiltonowskiego grafu o n wierzchołkach i $\binom{n-1}{2} + 1$ krawędziach.
Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia Orego.

Zad. 10 — Zaproponuj algorytm wielomianowy znajdowania cyklu Hamiltona w grafie spełniającym założenia twierdzenia Orego.

Zad. 11 — Niech G będzie grafem Petersena.

1. Jaka jest długość najkrótszego cyklu w G?
2. Udowodnij, że G nie jest hamiltonowski.
3. Pokaż, że G zawiera ścieżkę Hamiltona.



Rysunek 3: Graf Petersena

Lista 3

Niech $G = (V, E, \gamma)$. Oznaczenia:

- $\delta(G)$ - minimalny stopień wierzchołka w G,
- $\Delta(G)$ - maksymalny stopień wierzchołka w G,
- $\lambda(G)$ - spójność krawędziowa G (dla G spójnego),
- $\kappa(G)$ - spójność wierzchołkowa G (dla G spójnego),

Zad. 1 — Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie spójny. Udowodnij, że $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Podaj przykład grafu spójnego G takiego, że $\lambda(G) < \delta(G)$ oraz takiego, że $\lambda(G) = \delta(G)$.

Zad. 2 — Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie spójny. Udowodnij, że $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Podaj przykład grafu spójnego G takiego, że $\kappa(G) < \lambda(G)$ oraz takiego, że $\kappa(G) = \lambda(G)$.

Zad. 3 — Podaj przykład grafu spójnego G takiego, że $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$ oraz takiego, że $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$.

Zad. 4 — Udowodnij, że graf $T = (V, E)$ jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy T jest acykliczny i dodanie dowolnej krawędzi do T powoduje powstanie dokładnie jednego cyklu.

Zad. 5 — Udowodnij, że graf $T = (V, E)$ jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa wierzchołki w T są połączone dokładnie jedną drogą.

Zad. 6 — Niech $T = (V, E)$ i $T' = (V, E')$ będą dwoma różnymi drzewami rozpinającymi grafu G. Niech $e \in E \setminus E'$. Pokaż, że istnieje $f \in E' \setminus E$ taka, że $\tilde{T} = (V, E' \setminus \{f\} \cup \{e\})$ jest drzewem rozpinającym grafu G.

Zad. 7 — Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym oraz niech $w : E \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją wag krawędzi. Uzasadnij, że jeśli wagi krawędzi są parami różne, to G ma dokładnie jedno minimalne drzewo rozpinające.

Zad. 8 — Wyznacz liczby wszystkich nieetykietowanych ukorzenionych drzew binarnych o $2n+1$ wierzchołkach, w których kolejność poddrzew ma znaczenie, dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (tzw. "binary plane trees"). W drzewie binarnym każdy węzeł ma 0 lub 2 potomków. Skorzystaj z serwisu The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences do postawienia hipotezy o liczbie takich drzew dla dowolnego n. Spróbuj ją udowodnić.

Zad. 9 — Wyznacz liczbę drzew rozpinających grafu $K_{2,n}$ (wierzchołki sa rozróżnialne).

Zad. 10 — Ile drzew rozpinających ma graf K_n (wierzchołki są rozróżnialne)?

Dodatek

Zadanie z filmu „Buntownik z wyboru" — Narysuj wszystkie nieizomorficzne drzewa nieredukowalne (czyli nie posiadające wierzchołków stopnia 2) o 10 wierzchołkach.
Good Will Hunting (1997) - Will Solves Math Challenge (Matt Damon)

Lista 4

Zad. 1 — Udowodnij, że K_5 nie jest planarny, korzystając z jego reprezentacji graficznej.

Zad. 2 — Sprawdź wzór Eulera na przykładzie grafów platońskich (Rysunek 2).

Zad. 3 — Rozważmy rysunek płaski grafu G o n wierzchołkach, m krawędziach, f ścianach i k składowych spójnych. Udowodnij, że $n - m + f = k + 1$.

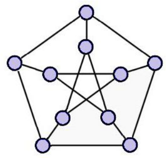
Zad. 4 — Niech G będzie prostym, spójnym grafem planarnym bez trójkątów o $n \geq 3$ wierzchołkach i m krawędziach. Udowodnij, że $m \leq 2n - 4$.

Zad. 5 — Udowodnij, że $K_{3,3}$ nie jest planarny korzystając z poprzedniego zadania.

Zad. 6 — Udowodnij, że każdy prosty graf planarny zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Zad. 7 — Dla jakich k hiperkostka Q_k jest grafem planarnym?

Zad. 8 — Udowodnij, wykorzystując twierdzenie Eulera, że jeśli G jest spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach, m krawędziach i długości najkrótszego cyklu wynoszącej 5, to $m \leq 5(n-2)/3$. Czy graf Petersena jest planarny?



Rysunek 4: Graf Petersena