Wrocław, 2026

LIST OF SHAME

MATEMATYKA DYSKRETNA

- Dla funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ piszemy $f(n) \sim g(n)$, jeśli $f(n)/g(n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
- Liczbę Stirlinga I rodzaju nieznakowaną oznaczamy $\left[{n \atop k}\right]$.
- Liczbę Stirlinga II rodzaju oznaczamy $\left\{{n \atop k}\right\}$.

1. Ile różnych par liczb można utworzyć z elementów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (kolejność elementów w parze nie ma znaczenia)?
2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij kombinatorycznie, że
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$
3. Niech $j, k, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij obliczeniowo i kombinatorycznie, że
$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.$$
4. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Zapisz w zwartej postaci
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$
5. Niech $k, n \in \mathbb{N}^+$. Ile rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych ma równanie
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n\,?$$
6. Załóżmy, że $k, n \in \mathbb{N}^+$ i k jest stałą. Zaproponuj wielomianową funkcję f taką, że $\binom{n}{k} \sim f(n)$.
7. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_k$ będą parami rozłącznymi zbiorami takimi, że $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = n$. Uzasadnij, że istnieje $j \in [k]$ takie, że $|A_j| \geq n/k$.
8. Uzasadnij, że $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
9. Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
(Najpierw zapisz sumę za pomocą liczb harmonicznych, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.)
10. Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu funkcji $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$.
11. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 8 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz rozkład σ na cykle i znajdź jej znak.
12. Uzasadnij, że $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$ oraz $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$.
13. Uzasadnij, że $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$.
14. Podaj funkcję tworzącą ciągu $a_n = 3^n + 2$. Funkcją tworzącą jakiego ciągu jest $\mathcal{A}(x) = \frac{5}{1-2x}$?
15. Rozwiąż rekurencję
$$\begin{cases} L_0 = 2, \\ L_1 = 1, \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \ \text{dla } n \geq 2. \end{cases}$$
16. Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu liczby Catalana $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Wymień trzy rodziny struktur kombinatorycznych, których moce można wyrazić za pomocą liczb Catalana.