

POTĘGA I LOGARYTM W \mathbb{C}

ANALOGIE I RÓŻNICE W ANALIZIE RZECZYWISTEJ I ZESPOLONEJ

Notacja. Przyjmujemy oznaczenia:

$\arg z =$ argument główny, czyli $\arg z \in (-\pi, \pi]$,

$\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

$\ln a =$ logarytm naturalny (analiza rzeczywista),

$\sqrt[n]{a} =$ pierwiastek arytmetyczny (analiza rzeczywista).

Dla $A, B \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ określamy: $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$, $AB = \{ab : a \in A \wedge b \in B\}$, $zA = \{z\}A$, $z + A = \{z\} + A$.

Punkt wyjścia. Zaczynamy od wzoru Eulera $e^z = e^{\text{Re } z} (\cos \text{Im } z + i \sin \text{Im } z)$.

1. Udowodnij własności liczb e^z

- (a) $e^z \neq 0$,
- (b) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$,
- (c) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$,
- (d) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$,
- (e) $e^{z_1+z_2+\dots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \dots e^{z_n}$,
- (f) $e^{nz} = (e^z)^n$ dla $n \in \mathbb{Z}$, przyjmując, że $(e^z)^0 = 1$,
- (g) $e^l = z \iff l = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Niech $P_k = \{z : -\pi + 2k\pi < \text{Im } z \leq \pi + 2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że funkcja $f(z) = e^z$ przekształca różnowartościowo P_k na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definicja. Każdą liczbę $l \in \mathbb{C}$, taką że $e^l = z$ nazywamy *logarytmem* liczby zespolonej $z \neq 0$. Dla $z \neq 0$ liczbę $\log z = \ln |z| + i \arg z$ nazywamy *logarytmem głównym*, natomiast zbiór $\text{Log } z = \{\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} = \ln |z| + i \text{Arg } z$ nazywamy *logarytmem ogólnym*.

Przykłady. $\log 1 = 0$, $\log(-1) = i\pi$, $\log i = \frac{i\pi}{2}$, $\text{Log } 1 = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Udowodnij własności liczb $\log z$ i zbiorów $\text{Log } z$

- (a) $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$ dla pewnych $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$,
- (b) $\log z^2 \neq 2 \log z$ dla pewnych $z \neq 0$,
- (c) $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$, jeśli $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$,
- (d) $\text{Log } z^2 \supseteq 2 \text{Log } z$, jeśli $z \neq 0$,
- (e) $\text{Log } z^2 \neq 2 \text{Log } z$, jeśli $z \neq 0$.

Definicja. Dla $z, w \in \mathbb{C}$, gdzie $z \neq 0$, liczbę $z^w = e^{w \log z}$ nazywamy *potęgą główną*.

Przykłady. $1^w = 1$, $(-1)^w = e^{w\pi i}$, $(-1)^i = \frac{1}{e^\pi}$, $i^i = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$.

Uwaga. Liczby $(z^{w_1})^{w_2}$, $(z^{w_2})^{w_1}$, $z^{w_1 w_2}$ mogą być parami różne, na przykład dla $z = e$, $w_1 = -\pi i$, $w_2 = -2\pi i$ mamy $(z^{w_1})^{w_2} = (e^{-\pi i})^{-2\pi i} = (-1)^{-2\pi i} = e^{-2\pi i \cdot \pi i} = e^{2\pi^2}$, $(z^{w_2})^{w_1} = (e^{-2\pi i})^{-\pi i} = 1^{-\pi i} = 1$, $z^{w_1 w_2} = e^{-\pi i \cdot (-2\pi i)} = e^{-2\pi^2} = \frac{1}{e^{2\pi^2}}$.

4. Udowodnij, że potęga główna z^w rozszerza znane przypadki szczególne

- (a) dla $z = e$,
- (b) dla $z = x$, gdzie $x \in (0, \infty)$ i $w = y \in \mathbb{R}$,
- (c) dla $w = n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

5. Udowodnij, że dla naturalnych $n \geq 1$ funkcja $f(z) = z^n$ jest różnowartościowa na zbiorze $\{z : z \neq 0 \wedge 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n}\} \cup \{0\}$.

6. Udowodnij własności liczb z^w

- (a) $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}$, jeśli $z \neq 0$ (tzw. *pierwiastek główny*),
- (b) $z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2}$, jeśli $z \neq 0$,
- (c) $(z_1 z_2)^w \neq z_1^w z_2^w$ dla pewnych $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$,
- (d) $(x_1 x_2)^w = x_1^w x_2^w$, jeśli $x_1, x_2 \in (0, \infty)$.

Definicja. Dla $z, w \in \mathbb{C}$, gdzie $z \neq 0$, zbiór $((z))^w = \{e^{wl} : l \in \text{Log } z\}$ nazywamy *potęgą ogólną*.

Przykłady. Dla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ mamy: $((x))^1 = \{x\}$, $((x))^{-1} = \{\frac{1}{x}\}$. Poza tym $((1))^i = \{e^{2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$, $((-1))^i = \{e^{2k\pi - \pi} : k \in \mathbb{Z}\}$, $((i))^i = \{e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} : k \in \mathbb{Z}\}$, $((1))^{\frac{1}{2}} = \{-1, 1\}$, $((-1))^{\frac{1}{2}} = \{-i, i\}$.

7. Udowodnij własności zbiorów $((z))^w$

- (a) $((z))^{\frac{1}{n}} = \{w : w^n = z\}$, jeśli $z \neq 0$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,
- (b) $((z_1 z_2))^w = ((z_1))^w ((z_2))^w$, jeśli $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$,
- (c) $((z))^{w_1+w_2} \subseteq ((z))^{w_1} ((z))^{w_2}$, jeśli $z \neq 0$,
- (d) $((z))^{w_1+w_2} \neq ((z))^{w_1} ((z))^{w_2}$ dla pewnych $z \neq 0$.