

LISTA NR 3 – ĆWICZENIA

1. Sprowadzić do problemów programowania liniowego (LP) następujące problemy:

(a)

$$\begin{array}{ll} \max_{k=1,\dots,s} \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \rightarrow \min & \min_{k=1,\dots,s} \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ \text{przy warunkach} & \text{przy warunkach} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq 0, & \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

Co będzie jeśli funkcja celu będzie postaci: $\min_{k=1,\dots,s} \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \rightarrow \min$ ($\max_{k=1,\dots,s} \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \rightarrow \max$) przy powyższych warunkach?

(b)

$$\begin{array}{ll} \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \rightarrow \min & \sum_{j=1}^n w_j |\mathbf{c}_j^T \mathbf{x} - r_j| \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & \text{przy warunkach} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{array}$$

gdzie $w_j > 0$, r_j , $j = 1, \dots, n$ są znanymi liczbami.

(c)

$$\begin{array}{ll} \sum_{t=1}^T \max \left\{ c_t^I \left(\sum_{k=1}^t x_k - \sum_{k=1}^t d_k \right), c_t^B \left(\sum_{k=1}^t d_k - \sum_{k=1}^t x_k \right) \right\} \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & l_t \leq x_t \leq u_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{array}$$

gdzie $c_t^I, c_t^B, l_t, u_t, d_t \geq 0$, $T \in \mathbb{N}$, są danymi parametrami problemu.

Wsk. Zauważ, że jeśli $\sum_{k=1}^t x_k - \sum_{k=1}^t d_k > 0$, to $\sum_{k=1}^t d_k - \sum_{k=1}^t x_k < 0$.

2. Poniżej podana jest tablica simpleksowa dla następującego zadania LP:

$$\begin{array}{ll} -30x_1 - 20x_2 \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & 2x_1 + x_2 \leq 1000, \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 2400, \\ & \frac{3}{2}x_1 \leq 600, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

c_j			-30	-20	0	0	0
	zmienne	wartości					
	bazowe	zm. bazowych	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
-20	x_2	600	0	1	-1	2/3	0
0	s_3	300	0	0	-3/2	1/2	1
-30	x_1	200	1	0	1	-1/3	0
	z_j	-18000	-30	-20	-10	-10/3	0
	$c_j - z_j$		0	0	10	10/3	0

(a) Podaj aktualne rozwiązanie bazowe.

- (b) Czy rozwiązanie w tablicy jest optymalne? Jeżeli nie jest to wykonaj odpowiednią ilość kroków algorytmem sympleks w celu otrzymania rozwiązania optymalnego. W przeciwnym przypadku (jeżeli jest) odpowiedź uzasadnij.
- (c) Podaj rozwiązanie optymalne.
- (d) Czy rozwiązanie optymalne jest jednoznaczne?
- (e) Podaj optymalne rozwiązanie zadania dualnego.
- (f) Jaka jest wartość funkcji celu zadania dualnego dla rozwiązania optymalnego?
- (g) (*Analiza wrażliwości*) W jakich granicach może się zmieniać współczynnik funkcji celu przy x_1 , aby rozwiązanie pozostawało optymalne?

3. (Sysło 1999) Dany jest układ równań liniowych

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wyjaśnić dlaczego jego rozwiązanie można otrzymać rozwiązując następujące zadanie LP:

$$\begin{aligned} & y \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right)y = b_i \quad i = 1, \dots, n, \\ & z_j \geq 0, y \geq 0, \end{aligned}$$

obliczając następnie x_j jako $x_j = z_j - y$, $j = 1, \dots, n$.

4. Wykazać, że następujące problemy programowania liniowego:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in [m]} 1 x_i^A \\ & \begin{cases} \mathbf{I} \mathbf{x}^A + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^A \geq \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych, i

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in [m]} 0 x_i^A - \sum_{i \in [m]} a_{i1}x_1 - \dots - \sum_{i \in [m]} a_{in}x_n \\ & \begin{cases} \mathbf{I} \mathbf{x}^A + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^A \geq \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

mają ten sam zbiór rozwiązań optymalnych.

5. Rozważmy zadanie LP w postaci standardowej:

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, oraz postać zadania LP w pierwszej fazie metody dwóch faz:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in [m]} 1 x_i^A \\ \bar{\mathbb{X}} = \quad & \begin{cases} \mathbf{I} \mathbf{x}^A + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^A \geq \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{x}^A \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sztucznych zmiennych.

Zdefiniujmy zbiór rozwiązań:

$$\bar{\mathbb{X}}_{\mathbf{0}} = \{[\mathbf{x}^A, \mathbf{x}]^T : [\mathbf{x}^A, \mathbf{x}]^T \in \bar{\mathbb{X}}, \mathbf{x}^A = \mathbf{0}\} \subset \bar{\mathbb{X}}.$$

Pokazać, że odwzorowanie $\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, jest bijekcją zbioru $\mathbb{X}$ na zbiór $\bar{\mathbb{X}}_{\mathbf{0}}$.

6. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie LP:

$$\begin{array}{rcll} & 10x_1 & + & x_2 & \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & x_1 & & & \leq 1, \\ & 20x_1 & + & x_2 & \leq 100, \\ & x_1, & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Ile iteracji wykona algorytm sympleks rozwiązując to zadanie?

7. (Murty 1976) Pokazać, że zagadnieniem dualnym do zagadnienia primalnego

$$\begin{array}{rcll} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & & -x_2 & +x_3 & \geq -1, \\ & x_1 & & -x_3 & \geq -1, \\ & -x_1 & +x_2 & & \geq -1, \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0, \end{array}$$

jest ono samo.

8. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{array}{rcll} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n & \rightarrow \max \\ \text{przy warunkach} & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & \leq 1, \\ & x_2 + x_3 + \cdots + x_n & \leq 1, \\ & \cdots & \\ & x_n & \leq 1, \\ & x_i \geq 0 & \text{dla wszystkich } i. \end{array}$$

Rozpatrzyć zadanie do niego dualne i wyznaczyć jego rozwiązanie optymalne bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń numerycznych.

9. (Sysło 1999) Dane jest zadanie programowania liniowego

$$\begin{array}{ll} \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} & \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \geq -\mathbf{c}, \\ & \mathbf{x} \geq 0, \boldsymbol{\pi} \geq 0, \end{array}$$

gdzie $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ są macierzami odpowiednio rozmiaru $m \times n$, $m \times 1$, $n \times 1$. Udowodnić, że zadanie to albo nie ma rozwiązania dopuszczalnego, albo jego rozwiązaniem jest wektor $(\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\pi}^T)$, taki że $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} = 0$.

10. (Sysło 1999) Dane jest następujące zadanie programowania LP

$$\begin{array}{llllllll} & x_1 & +4x_2 & & + & 3x_4 & +x_5 & +x_6 & \rightarrow \min \\ \text{przy warunkach} & -x_1 & +2x_2 & & +x_3 & -x_4 & +x_5 & & = -3, \\ & 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & -x_4 & & & +x_6 & = -2, \\ & & & & & & & & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4. \end{array}$$

Pokazać, że prymalne rozwiązanie $x_5 = -3$, $x_6 = -2$ jest dualnie dopuszczalne. Podać odpowiadające rozwiązanie dualne.