

Metody optymalizacji

Wykład nr 13

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Problem mnożników Lagrange'a

$$z^* = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$Ax \leq b$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

$$L(\mu) = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

Problem mnożników Lagrange'a

$$z^* = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

Problem mnożników Lagrange'a (najlepsze dolne ograniczenie)

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

Problem mnożników Lagrange'a

$$z^* = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{X}$$

Problem mnożników Lagrange'a (najlepsze dolne ograniczenie)

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

W przypadku $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ problem mnożników Lagrange'a ma postać

$$L^* = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}).$$

Maksymalizujemy $\boldsymbol{\mu}$ minimalizując $\mathbf{x}$.



Problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem czasowym (Constrained Shortest Path) CSP

$$z^* = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A.$$

Relaksacja CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \mu \left(\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} - T \right)$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & (i, j) \in A. \end{cases}$$

Relaksacja CSP

$$L(\mu) = \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \mu \left(\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} - T \right)$$

$$\sum_{j \in S(i)} x_{ij} - \sum_{j \in P(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s, \\ -1 & i = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A.$$

Inne sformułowanie (ścieżkowe)

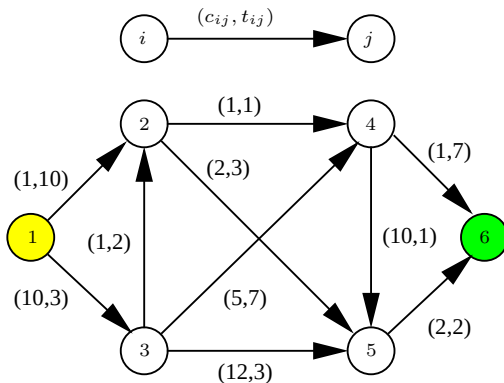
$$L(\mu) = \min_{p \in \mathcal{P}_{st}} \sum_{(i,j) \in p} c_{ij} + \mu \left(\sum_{(i,j) \in p} t_{ij} - T \right) = \min_{p \in \mathcal{P}_{st}} c_p + \mu(t_p - T)$$

gdzie $\mathcal{P}_{st}$ jest zbiorem ścieżek od s do t .



Relaksacja CSP

Należy znaleźć najtańszą ścieżkę od wierzchołka 1 do 6, której czas przejazdu nie przekracza 14 ($T = 14$).

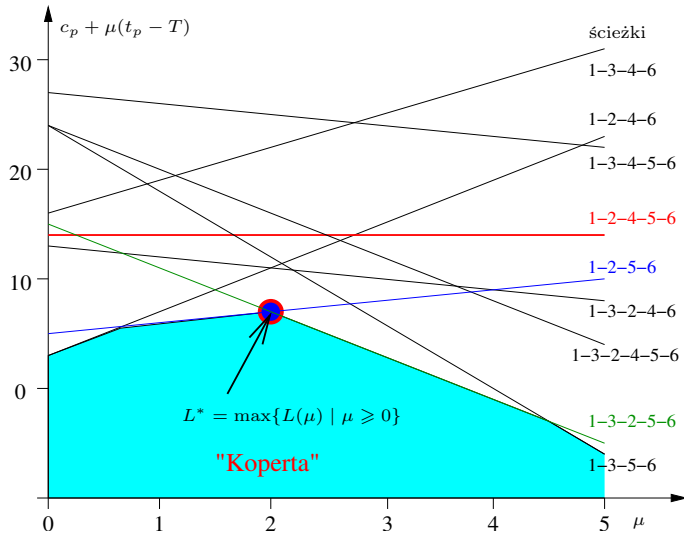


Problem mnożników Lagrange'a

Jaka jest natura problemu mnożników Lagrange'a?

ścieżka p	koszt c_p	czas t_p	$c_p + \mu(t_p - T)$
1-2-4-6	3	18	$3 + 4\mu$
1-2-5-6	5	15	$5 + \mu$
1-2-4-5-6	14	14	14
1-3-2-4-6	13	13	$13 - \mu$
1-3-2-5-6	15	10	$15 - 4\mu$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Problem mnożników Lagrange'a



Problem mnożników Lagrange'a

Rozważmy uogólnienie problemu

$$\begin{array}{l} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \end{array}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem skończonym $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K\}$. Dokonując relaksacji Lagrange'a otrzymujemy

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\mu) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \text{ dla } k = 1, \dots, K.$$

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ jest hiperpłaszczyzną.



Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\mu) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \text{ dla } k = 1, \dots, K.$$

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ jest hiperpłaszczyzną.

Hiperpłaszczyzny $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ dla $k = 1, \dots, K$ tworzą "kopertę".



Problem mnożników Lagrange'a

Z definicji

$$L(\mu) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \text{ dla } k = 1, \dots, K.$$

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ jest hiperpłaszczyzną.

Hiperpłaszczyzny $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$ dla $k = 1, \dots, K$ tworzą "kopertę".

W problemie mnożników Lagrange'a chcemy wyznaczyć najwyższy punkt tej "koperty". Co sprowadza się do rozwiązania następującego problemu

$$\begin{aligned} & \max w \\ & w \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \text{ dla } k = 1, \dots, K \\ & \mu \text{ dowolna.} \end{aligned}$$

Rozwiązanie powyższego problemu sprowadza się do rozwiązania szeregu zadań **LP**.



Problem mnożników Lagrange'a

Metoda gradientów

Niech funkcja celu f będzie różniczkowalna i wklęsła. Gradient funkcji

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

o ile nie jest równy zero, wskazuje kierunek wzrostu wartości funkcji w pobliżu punktu, w którym jest wyliczony.



Problem mnożników Lagrange'a

Metoda gradientów

Niech funkcja celu f będzie różniczkowalna i wklęsła. Gradient funkcji

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

o ile nie jest równy zero, wskazuje kierunek wzrostu wartości funkcji w pobliżu punktu, w którym jest wyliczony. Jeżeli wybierzemy taki kierunek $\mathbf{d}$, że $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} > 0$, wówczas niewielkie przesunięcie o θ ,

$$\mathbf{x} + \mathbf{d}\theta$$

w tym kierunku spowoduje wzrost wartości funkcji

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{d}\theta) \geq f(\mathbf{x}).$$

Kierunek gradientu jest kierunkiem "w górę stoku".



Problem mnożników Lagrange'a

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

- Startujemy z $\boldsymbol{\mu}^0$.
- dla $k := 0, 1, \dots$
Wyznaczamy $\mathbf{x}^k$ rozwiązując $L(\boldsymbol{\mu}^k)$

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} := \boldsymbol{\mu}^k + \theta^k (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}).$$

Problem z doboorem θ^k - duże, małe!



Problem mnożników Lagrange'a

Założmy, że $\mathbf{x}^k$ rozwiązuje $L(\mu)$ dla $\mu = \mu^k$. Wówczas jest rozwiązaniem w otoczeniu μ . Aproksymujemy liniowo $L(\mu)$ za pomocą

$$r(\mu) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A} \mathbf{x}^k - \mathbf{b}).$$



Problem mnożników Lagrange'a

Założmy, że $\mathbf{x}^k$ rozwiązuje $L(\mu)$ dla $\mu = \mu^k$. Wówczas jest rozwiązaniem w otoczeniu μ . Aproxymujemy liniowo $L(\mu)$ za pomocą

$$r(\mu) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}).$$

Założmy, że znamy L^* , wówczas możemy tak wykonać ruch (dobrać θ^k), że osiągniemy L^* .

$$r(\mu^{k+1}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + \mu^{k+1 T} (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) = L^*$$

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \theta^k (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})$$

$$r(\mu^{k+1}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^k + (\mu^k + \theta^k (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}))^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) = L^*.$$



Problem mnożników Lagrange'a

Z równań wyznaczamy θ^k

$$\theta^k = \frac{L^* - L(\mu^k)}{\|\mathbf{Ax}^k - \mathbf{b}\|^2}.$$

Ponieważ L^* nie jest znane, możemy użyć górnego ograniczenia UB na wartość funkcji celu z^*

$$\theta^k = \frac{\lambda_k(UB - L(\mu^k))}{\|\mathbf{Ax}^k - \mathbf{b}\|^2},$$

gdzie $\lambda_k \in [0, 2]$.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 1

Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a do następującego zadania **LP**

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1}$$

dokonując relaksacji ograniczeń $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wówczas optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników równa jest optymalnej wartości funkcji celu problemu (1).

Dowód.

(zob. koniec).



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

- Relaksacja Lagrange'a może być alternatywną sposobem rozwiązywania problemów **LP**.
- W niektórych przypadkach zastosowanie relaksacji Lagrange'a do **LP** może prowadzić do łatwiejszego rozwiązania problemu.
- Zastosowanie relaksacji może prowadzić do podziału problemu na mniejsze podproblemy (dekompozycje).



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem dyskretnym $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ i całkowity}\}$, $\mathbf{D}$ jest macierzą, której elementy są całkowite, a $\mathbf{q}$ jest wektorem z całkowitymi elementami.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{X} \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem dyskretnym $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ i całkowity}\}$, $\mathbf{D}$ jest macierzą, której elementy są całkowite, a $\mathbf{q}$ jest wektorem z całkowitymi elementami.

$$\begin{aligned} z^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \text{ i całkowity} \end{aligned} \tag{3}$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$z^0 = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3).

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$z^0 = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3). Wiemy, że

$$z^0 \leq z^*.$$

oraz

$$L^* \leq z^*.$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Niech

$$z^0 = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

będzie liniową relaksacją problemu (3). Wiemy, że

$$z^0 \leq z^*.$$

oraz

$$L^* \leq z^*.$$

Pokażemy, że wartość L^* jest najlepszym dolnym ograniczeniem na z^* ,
czyli

$$z^0 \leq L^*.$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Założmy, że zbiór $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K\}$ jest skończony.

Rozwiązanie $\mathbf{x}$ jest wypukłą kombinacją rozwiązań $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K$, jeżeli

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{x}^k \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k &= 1 \\ \lambda_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, K.\end{aligned}$$

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Założmy, że zbiór $\mathbb{X} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K\}$ jest skończony.

Rozwiązanie $\mathbf{x}$ jest wypukłą kombinacją rozwiązań $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^K$, jeżeli

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{x}^k \\ \sum_{k=1}^K \lambda_k &= 1 \\ \lambda_k &\geq 0 \quad k = 1, \dots, K.\end{aligned}$$

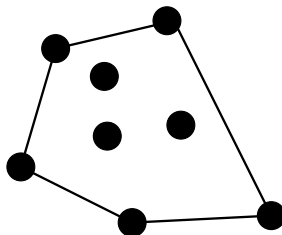
$\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest otoczką wypukłą $\mathbb{X}$, jeżeli

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ jest wypukłą kombinacją punktów } \mathbb{X}\}.$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Otoczka wypukła w $\mathbb{R}^2$



Otoczka wypukła $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest najmniejszym wielościannem wypukłym zawierającym wszystkie punkty zbioru $\mathbb{X}$.

Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

- a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$, gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą, a $\mathbf{d}$ jest wektorem.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

- a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$, gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą, a $\mathbf{d}$ jest wektorem.
- b) Każdy punkt ekstremalny (wierzchołek) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ należy do $\mathbb{X}$. Jeżeli rozwiązujemy zadanie $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$, to rozwiązanie optymalne należy do $\mathbb{X}$.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Własność 1

- a) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ jest wielościanem, który może być wyrażony za pomocą $\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$, gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą, a $\mathbf{d}$ jest wektorem.
- b) Każdy punkt ekstremalny (wierzchołek) $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ należy do $\mathbb{X}$. Jeżeli rozwiązujemy zadanie $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}$, to rozwiązanie optymalne należy do $\mathbb{X}$.
- c) Jeżeli $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, to $\mathcal{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.

Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$).



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.

Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$). Druga część wynika z faktu, że optimum w zadaniach **LP** jest osiągnięte zawsze w co najmniej jednym punkcie ekstremalnym (wierzchołku).



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Ad. a) Jest to znany fakt z algebry liniowej.

Ad. b) Pierwsza część wynika z faktu, że punkty należące do $\mathcal{H}(\mathbb{X})$ a nie należące do $\mathbb{X}$ są wypukłą kombinacją z dodatnimi wagami co najmniej dwóch punktów z $\mathbb{X}$. Zatem nie są ekstremalne (nie są wierzchołkami $\mathbb{X}$). Druga część wynika z faktu, że optimum w zadaniach **LP** jest osiągnięte zawsze w co najmniej jednym punkcie ekstremalnym (wierzchołku).

Ad. c) Ponieważ każdy element zbioru $\mathbb{X}$ należy do wypukłego zbioru $\mathbb{Y}$. Stąd każda wypukła kombinacja elementów zbioru $\mathbb{X}$ ($\mathcal{H}(\mathbb{X})$) również należy do $\mathbb{Y}$. □



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 2

Optymalna wartość funkcji Lagrange'a L^* w problemie mnożników Lagrange'a jest równa optymalnej wartości funkcji celu następującego zadania **LP**

$$\begin{aligned} z_{LP} &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}) \end{aligned} \tag{4}$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego μ .

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego μ .

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

która równoważna jest (własność 1 b) następującemu zadaniu (może ono być wyrażone jako **LP** – własność 1 a)

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (5)$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Rozważmy relaksację Lagrange'a problemu (2) dla pewnego μ .

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

która równoważna jest (własność 1 b) następującemu zadaniu (może ono być wyrażone jako **LP** – własność 1 a)

$$L(\mu) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (5)$$

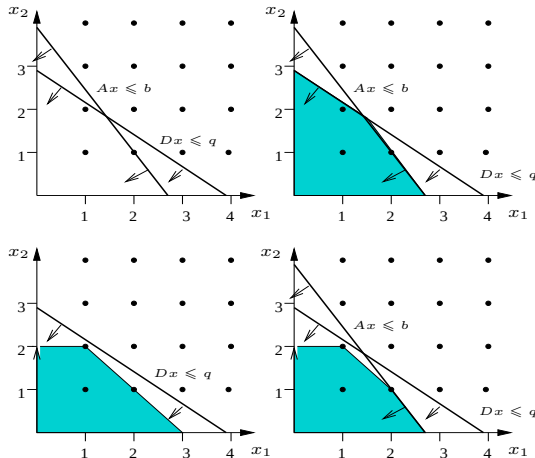
Problem (5) jest relaksacją Lagrange'a (relaksacja ograniczeń $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) problemu (4). Zatem z twierdzenia 1 optymalna wartość L^* problemu mnożników jest równa optymalnej wartości z_{LP} problemu (4).



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

$$\{x \mid Ax \leq b, Dx \leq q, x \geq 0 \text{ i całkowity}\}$$

$$\{x \mid Ax \leq b, Dx \leq q, x \geq 0\}$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 3

Jeżeli zastosujemy relaksację Lagrange'a, i rozwiążemy problem mnożników, dla problemu

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

Wówczas $z^0 \leq L^*$, gdzie

$$\begin{aligned} z^0 &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Z twierdzenia 2 mamy

$$\begin{aligned} L^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}). \end{aligned}$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Dowód.

Z twierdzenia 2 mamy

$$\begin{aligned} L^* &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{H}(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Z własności 1 c dostajemy

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}) = \mathcal{H}(\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ i całkowity}\}) \subseteq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Zatem $z^0 \leq L^*$.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Kiedy $z^0 = L^*$?



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Kiedy $z^0 = L^*$?

Niech $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ i całkowity}\}$.

Definicja

$\mathbb{X}$ ma *własność całkowitoliczbowości* jeżeli następujące zadanie **LP** ma rozwiązania całkowitoliczbowe dla każdego $\mathbf{d}$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{d}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\mathbb{X}$ ma *własność całkowitoliczbowości*, jeśli np. $\mathbf{D}$ jest całkowicie unimodularna i $\mathbf{q}$ jest całkowity.



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Fakt 1

Jeżeli $\mathbb{X}$ ma własność całkowitoliczbowości, to

$$\min\{\mathbf{d}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \min\{\mathbf{d}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X}\} = \min\{\mathbf{d}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{H}(\mathbb{X})\}.$$



Związek relaksacji Lagrange'a z LP

Twierdzenie 4

Jeżeli podproblem Lagrange'a po relaksacji problemu

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \text{ i całkowity.} \end{aligned}$$

ma własność całkowitoliczbowości, to $L^* = z^0$, gdzie

$$\begin{aligned} z^0 &= \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dowód.

Z faktu 1.

Dowód twierdzenia 1

Skorzystamy z dualności zadań **LP**. Załóżmy, że $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

a $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiadającego zadania dualnego.



Dowód twierdzenia 1

Skorzystamy z dualności zadań **LP**. Załóżmy, że $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} &\leq \mathbf{q} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

a $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiadającego zadania dualnego. Muszą więc spełniać warunki dopuszczalności i warunki komplementarności (twierdzenie o różnicach dopełniających):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T + \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{A} + \boldsymbol{\gamma}^{*T} \mathbf{D} &\geq \mathbf{0} \\ (\mathbf{c}^T + \boldsymbol{\pi}^{*T} \mathbf{A} + \boldsymbol{\gamma}^{*T} \mathbf{D}) \mathbf{x}^* &= 0 \\ \boldsymbol{\pi}^{*T} (\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}) &= 0 \\ \boldsymbol{\gamma}^{*T} (\mathbf{Dx}^* - \mathbf{q}) &= 0 \end{aligned}$$



Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\mu) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).



Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\mu) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).

Przyjmijmy za $\mu = \pi^*$. Zatem

$$L(\pi^*) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \pi^{*T} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\mu) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).

Przyjmijmy za $\mu = \pi^*$. Zatem

$$L(\pi^*) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \pi^{*T} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).



Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\mu) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).

Przyjmijmy za $\mu = \pi^*$. Zatem

$$L(\pi^*) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \pi^{*T} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).

Po przyjęciu $\mu = \pi^*$ warunki komplementarności dla problemu Lagrange'a są takie same jak warunki powyżej.



Dowód twierdzenia 1...

Niech $L(\mu) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mu^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ będzie relaksacją problemu (6).

Przyjmijmy za $\mu = \pi^*$. Zatem

$$L(\pi^*) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \pi^{*T} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \mid \mathbf{Dx} \leq \mathbf{q}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla tego problemu, ponieważ jest rozwiązaniem dopuszczalnym dla (6).

Po przyjęciu $\mu = \pi^*$ warunki komplementarności dla problemu Lagrange'a są takie same jak warunki powyżej.

Zatem $\mathbf{x}^*$ rozwiązuje problem Lagrange'a dla $\mu = \pi^*$. Ponieważ $\pi^{*T} (\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}) = 0$, $L(\pi^*) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. Stąd $L^* = L(\pi^*) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. $\square$



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książki:



Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin.

Network Flows: theory, algorithms, and applications.

Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.