

Metody optymalizacji

Wykład nr 3

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Twierdzenie

Jeżeli założenia o rzędzie i o niesprzeczności są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma co najmniej jeden wierzchołek (rozwiązanie bazowe dopuszczalne).



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Wybierzmy $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Dowód.

Z założenia o niesprzeczności mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$.

Wybierzmy $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Uporządkujmy składowe x

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0], \quad x_j > 0 \quad j \in [t].$$

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest postaci

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{A}_t x_t = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{A}_j$ jest j -tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest postaci

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{A}_t x_t = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{A}_j$ jest j -tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$.

Niech $r = \text{rank}([\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t])$. Oczywiście $r \leq \text{rank}(\mathbf{A})$ oraz $r > 0$.

W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Kontynuując ($t > 0$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest postaci

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{A}_t x_t = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{A}_j$ jest j -tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$.

Niech $r = \text{rank}([\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t])$. Oczywiście $r \leq \text{rank}(\mathbf{A})$ oraz $r > 0$.

W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.

Rozpatrzmy dwa przypadki.

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\bar{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A}$,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\bar{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A}$,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$.

Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \dots, x_r$ wektora $\mathbf{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \dots, x_t$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\bar{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A}$,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$.

Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \dots, x_r$ wektora $\mathbf{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \dots, x_t$.

Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ można zapisać (pierwsze r ograniczeń):

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}',$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}} = [x_1, \dots, x_r]$, $\overline{\overline{\mathbf{x}}} = [x_{r+1}, \dots, x_t]$, $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^r$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1}b' - \bar{A}^{-1}\bar{A}\bar{x}.$$

Podstawiając $\beta = \bar{A}^{-1}b'$ i $\alpha = -\bar{A}^{-1}\bar{A}$. Składowe $\bar{x}$ mają postać

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i \quad j \in [r].$$



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} b' - \bar{A}^{-1} \bar{A} \bar{x}.$$

Podstawiając $\beta = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b}'$ i $\alpha = -\bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{A}}$. Składowe $\bar{\mathbf{x}}$ mają postać

$$\mathbf{x}_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} \mathbf{x}_i \quad j \in [r].$$

Konstruujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne $\hat{x}$, które będzie miało o co najmniej jedną składową zerową więcej niż x

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r + 1, \\ x_j & \text{dla } j > r + 1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} \hat{x}_i & \text{dla } j < r + 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} x_i$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r + 1, \\ x_j & \text{dla } j > r + 1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} \hat{x}_i & \text{dla } j < r + 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} x_i$.

Przyjrzyjmy się składowym $\hat{x}_j$, $j \in [r]$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} \hat{x}_i = \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} x_i - \theta \alpha_{r+1j} \\ &= x_j - \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} x_i + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij} x_i - \theta \alpha_{r+1j} = x_j - \theta \alpha_{r+1j}. \end{aligned}$$



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r + 1, \\ x_j & \text{dla } j > r + 1, \\ x_j - \theta \alpha_{r+1j} & \text{dla } j < r + 1. \end{cases}$$



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r + 1, \\ x_j & \text{dla } j > r + 1, \\ x_j - \theta \alpha_{r+1j} & \text{dla } j < r + 1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geq 0, \\ x_j - \alpha_{r+1j}\theta \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geq \theta, \\ x_j \geq \alpha_{r+1j}\theta. \end{cases}$$



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r + 1, \\ x_j & \text{dla } j > r + 1, \\ x_j - \theta \alpha_{r+1j} & \text{dla } j < r + 1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geq 0, \\ x_j - \alpha_{r+1j}\theta \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geq \theta, \\ x_j \geq \alpha_{r+1j}\theta. \end{cases}$$

Wybieramy $\theta_1 = \min \left\{ \frac{x_j}{\alpha_{r+1j}} : \alpha_{r+1j} > 0, j \in [r] \right\}$, $\theta = \min\{x_{r+1}, \theta_1\}$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1 k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1 k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\mathbf{x}$.



Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1 k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\mathbf{x}$.

Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek ($r = t$). □

Wierzchołek zbioru, rozwiązanie bazowe dopuszczalne

- Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$.
- Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1 k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r + 1$.

$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż $\mathbf{x}$.

Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek ($r = t$). □

Wniosek

*Jeżeli założenia **założenia o rzędzie i o niesprzeczności** są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma skończoną liczbę wierzchołków.*



Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?



Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest **domknięty** i **ograniczony**?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.



Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest **domknięty** i **ograniczony**?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.
- Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.



Pytanie: Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest **domknięty** i **ograniczony**?

- Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.
- Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Założenie (o ograniczoności z dołu)

Funkcja $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ jest ograniczona z dołu na zbiorze $\mathbb{X}$ (problem minimalizacji), tj. zbiór $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}$ jest z dołu ograniczony.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Lemat (Ograniczenie rozwiązania bazowego)

Niech $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$). Wtedy

$$|x_j| \leq m! \alpha^{m-1} \beta,$$

gdzie $\alpha = \max_{i,j} \{|\mathbf{a}_{ij}|\}$ i $\beta = \max_i \{|\mathbf{b}_i|\}$.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Założmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm \det(\mathbf{B}_{ij})$, $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times (m-1)}$, i $\det(\mathbf{B})$.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Założmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm \det(\mathbf{B}_{ij})$, $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times (m-1)}$, i $\det(\mathbf{B})$. Ponieważ $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, $|\det(\mathbf{B})| \geq 1$.

$$\det(\mathbf{B}_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_{m-1}} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m-1\sigma(m-1)}, \quad \text{dla } i = m, j = m.$$

Suma $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Założmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b} \quad \text{suma } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm \det(\mathbf{B}_{ij})$, $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times (m-1)}$, i $\det(\mathbf{B})$. Ponieważ $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, $|\det(\mathbf{B})| \geq 1$.

$$\det(\mathbf{B}_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_{m-1}} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m-1\sigma(m-1)}, \quad \text{dla } i = m, j = m.$$

Suma $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników. Zatem

$|\det(\mathbf{B}_{ij})| \leq (m-1)! \alpha^{m-1}$. Stąd i z faktu, że $x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b}$ (suma m iloczynów), mamy ograniczenie $m! \alpha^{m-1} \beta$.

Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Twierdzenie

Jeżeli założenia *założenia o rzędzie, o niesprzeczności i ograniczoności z dołu* są spełnione, to problemy:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{przy warunkach } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{przy warunkach } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$x_j \leq M \quad j \in [n]$$

są równoważne, tj. ich optymalne wartości funkcji celu są sobie równe,

$$M = (m+1)! \alpha^m \beta, \alpha = \max_{i,j} \{ |a_{ij}|, |c_j| \}, \beta = \max_i \{ |b_i|, |z| \},$$

z jest największym dolnym ograniczeniem zbioru $\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\mathbf{x}$ taki, że $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\mathbf{x}$ taki, że $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T \mathbf{x} &= z \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\mathbf{x}$ taki, że $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T \mathbf{x} &= z \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne. Macierz układu jest rzędu $m + 1$. Wtedy posiada on co najmniej jedno rozwiązanie bazowe dopuszczalne. Jego składowe x_j spełniają ograniczenia $x_j \leq M, j \in [n]$. Ograniczenia nie wpływają na rozwiązania optymalne oryginalnego problemu.



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Macierz układu jest rzędu m . Wtedy $\mathbf{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{c}^T = \sum_{i \in [m]} \gamma_i \mathbf{a}^T \text{ i } \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i, \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

Wszystkie rozwiązania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ mają stały koszt $\sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i$.
Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście spełniają ograniczenia $x_j \leq M$, $j \in [n]$. □



Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks..

Dowód. Macierz układu jest rzędu m . Wtedy $\mathbf{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{c}^T = \sum_{i \in [m]} \gamma_i \mathbf{a}^T \text{ i } \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in [m]} \gamma_i \mathbf{b}_i, \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

Wszystkie rozwiązania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ mają stały koszt $\sum_{i \in [m]} \gamma_i \mathbf{b}_i$.
Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście spełniają ograniczenia $x_j \leq M$, $j \in [n]$. □

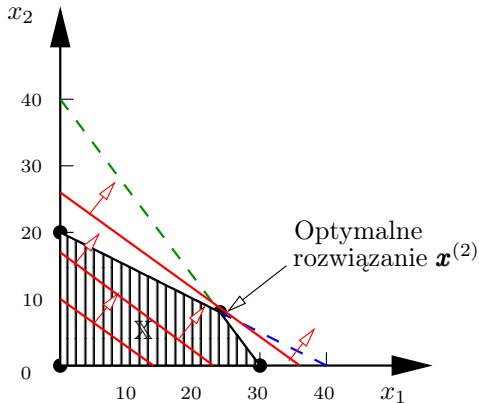
Założenie (o ograniczoności)

Zbiór $\mathbb{X}$ jest ograniczony.



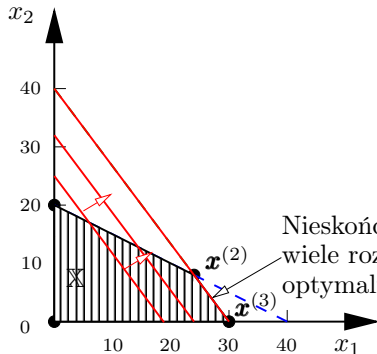
Geometryczna interpretacja problemu LP

$$\begin{aligned} -4x_1 - 5x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Geometryczna interpretacja problemu LP...

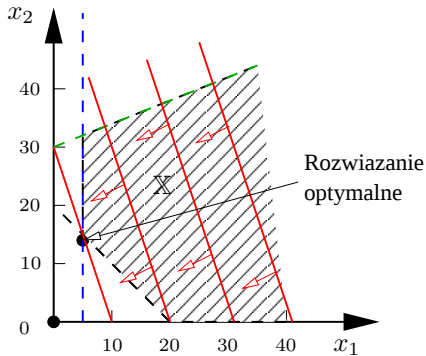
$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



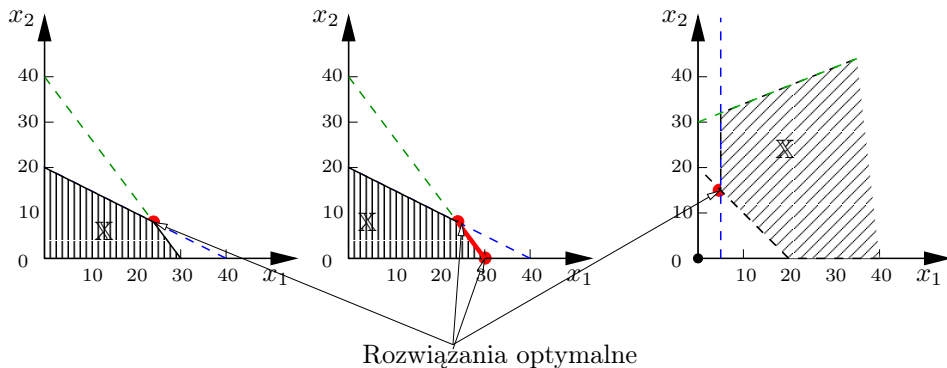
Nieskończenie
wiele rozwiązań
optymalnych, $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^{(2)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(3)}$, $\lambda \in [0, 1]$

Geometryczna interpretacja problemu LP...

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\geq 20 \\ -x_1 + 2.5x_2 &\leq 75 \\ x_1 &\geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Własność problemu liniowego programowania



Własność problemu liniowego programowania...

Twierdzenie (o optimum w wierzchołku)

*Jeżeli założenia **założenia o rzędzie, o niesprzeczności i ograniczoności** są spełnione, to $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ przyjmuje wartość najmniejszą w $\mathbb{X}$ w co najmniej jednym wierzchołku tego zbioru.*

Jeżeli kilka wierzchołków $\mathbb{X}$ reprezentuje rozwiązanie optymalne, to wypukła kombinacja tych wierzchołków jest także rozwiązaniem optymalnym.



Własność problemu liniowego programowania...

Twierdzenie (bez dowodu)

Jeżeli $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ jest wielościanem wypukłym, każdy punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ można przestawić jako wypukłą kombinację jego wierzchołków $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell$, tzn.

$$\mathbf{x} = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j,$$

$$\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in [\ell].$$

Inaczej

$$\mathbb{X} = \text{conv}(\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell),$$

$\text{conv}(\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell)$ jest otoczką wypukłą punktów $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell$.



Własność problemu liniowego programowania...

Dowód (twierdzenia o optimum w wierzchołku).

Niech $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Dowód (twierdzenia o optimum w wierzchołku).

Niech $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Z twierdzenia “bez dowodu” $\mathbf{x}^*$ możemy przedstawić:

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in [\ell], \quad \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = 1,$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}^j$ są wierzchołkami $\mathbb{X}$.



Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$



Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Niech

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r = \min_{j \in [\ell]} \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Zatem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Niech

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r = \min_{j \in [\ell]} \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Stąd

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j \geq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r,$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$



Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\mathbf{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$



Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\mathbf{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$



Własność problemu liniowego programowania...

Ponieważ $\hat{\mathbf{x}}^r \in \mathbb{X}$, to

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$

koniec pierwszej części dowodu.



Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^k$ będą takie, że

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, j \in [k].$$

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^k$ będą takie, że

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\mathbf{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^k$ będą takie, że

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\mathbf{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j.$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}' = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^* \sum_{j \in [k]} \lambda_j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^*.$$



Własność problemu liniowego programowania...

Niech $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^k$ będą takie, że

$$\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*, j \in [k].$$

Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków

$$\mathbf{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j.$$

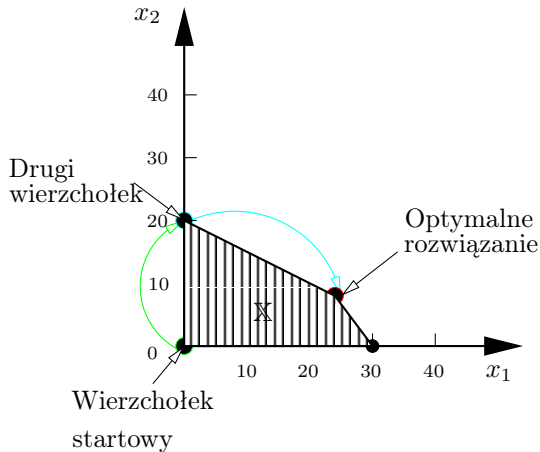
$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}' = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^* \sum_{j \in [k]} \lambda_j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^*.$$



Idea algorytmu

Spostrzeżenie

Aby znaleźć rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego wystarczy inteligentnie przejrzeć wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych (lub równoważnie rozwiązania bazowe dopuszczalne) i wybrać wierzchołek, w którym wartość funkcji celu jest optymalna.



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek



Ireneusz Nykowski.

Programowanie liniowe.

PWE, Warszawa, 1980.



Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.

Combinatorial optimization: algorithms and complexity.

Dover Publications Inc., 1998.

