

Metody optymalizacji

Wykład nr 7

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Dualny algorytm sympleks

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$



Dualny algorytm sympleks

W przypadku zagadnienia prymalnego w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

zagadnienia dualne jest postaci:

$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych
nieograniczonych co do znaku.



Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\mathbf{x}^{(0)}$.



Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\mathbf{x}^{(0)}$.
- W każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\mathbf{x}^{(r)}$, tj.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^{(r)} = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T,$$

gdzie $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$, a podmacierz $\mathbf{B}$ jest bazą.



Prymalny algorytm sympleks - przypomnienie

- Startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\mathbf{x}^{(0)}$.
- W każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\mathbf{x}^{(r)}$, tj.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \mathbf{x}^{(r)} = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T,$$

gdzie $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$, a podmacierz $\mathbf{B}$ jest bazą.
Jeśli $\mathbf{x}^{(r)}$ spełnia warunek optymalności

$$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0},$$

wówczas algorytm **kończy** działanie.



Warunek optymalności, rozwiązanie dualne

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{z}^T \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - [(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1, \dots, (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_n] \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n] \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T,$$

$$(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T,$$

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T.$$



Warunek optymalności, rozwiązanie dualne

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{z}^T \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - [(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1, \dots, (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_n] \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n] \geq \mathbf{0}^T,$$

$$\mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{0}^T,$$

$$(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T,$$

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T.$$

Przyjmijmy (jak do tej pory), że pierwsze m kolumn w $\mathbf{A}$ to kolumny bazowe.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j & \text{dla } j = 1, \dots, m, \\ \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A}_j \geq c_j & \text{dla } j = m+1, \dots, n. \end{cases}$$



Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.



Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.

- $\mathbf{x}^B$ jest *dualnie dopuszczalne* jeśli spełnienia warunek optymalności, a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego.



Warunek optymalności, rozwiązanie dualne...

Definicja

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego.

- $\mathbf{x}^B$ jest *dualnie dopuszczalne* jeśli spełnienia warunków optymalności, a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego.
- $\mathbf{x}^B$ jest *prymalnie dopuszczalne* jeśli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$.



Algorytm dualny - idea

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.



Algorytm dualny - idea

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Jeśli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$, czyli $\mathbf{x}^B$ jest **prymalnie dopuszczalne**, to algorytm **kończy** działanie.



Algorytm dualny - idea

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Jeśli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$, czyli $\mathbf{x}^B$ jest **prymalnie dopuszczalne**, to algorytm **kończy** działanie.
- W przeciwnym przypadku, gdy $\mathbf{x}^B \not\geq \mathbf{0}$, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\mathbf{x}^B$, pozbywając się ujemnych składowych $\mathbf{x}^B$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}$.



Algorytm dualny - idea

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Jeśli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$, czyli $\mathbf{x}^B$ jest **prymalnie dopuszczalne**, to algorytm **kończy** działanie.
- W przeciwnym przypadku, gdy $\mathbf{x}^B \not\geq \mathbf{0}$, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\mathbf{x}^B$, pozbywając się ujemnych składowych $\mathbf{x}^B$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}$.

Algorytm kończy działanie po skończonej liczbie kroków. Wtedy

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi}.$$

Widać, że algorytm dualny sympleks **niejawnie** rozwiązuje zadanie prymalne.



Algorytm prymalny - algorytm dualny

algorytm prymalny			algorytm dualny		
$x^B \geq 0$	$c - z \not\geq 0$	$\pi^T A \not\leq c^T$	$x^B \not\geq 0$	$c - z \geq 0$	$\pi^T A \leq c^T$
$x^B \geq 0$	$c - z \not\geq 0$	$\pi^T A \not\leq c^T$	$x^B \not\geq 0$	$c - z \geq 0$	$\pi^T A \leq c^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x^B \geq 0$	$c - z \geq 0$	$\pi^T A \leq c^T$	$x^B \geq 0$	$c - z \geq 0$	$\pi^T A \leq c^T$

W każdym kroku:
wybieramy kolumnę A_k ,
która wchodzi do bazy B ;
wybieramy kolumnę A_{i^*} ,
która wychodzi z bazy B .

W każdym kroku:
wybieramy kolumnę A_{i^*} ,
która wychodzi z bazy B ;
wybieramy kolumnę A_k ,
która wchodzi do bazy B .



Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.



Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Niech $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.



Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Niech $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.



Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Niech $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.
- Kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy.



Krok dualnego algorytmu sympleks

- Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego, które jest **dualnie dopuszczalne**.
- Niech $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego.
- Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe.
- Kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy.
- Kolumna k (zmienna) wchodzi do bazy.



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$B = [B_1, \dots, B_{j^*}, \dots, B_m] \rightarrow \bar{B} = [B_1, \dots, B_{j^*-1}, B_{j^*+1}, \dots, B_m, P_k].$$



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$B = [B_1, \dots, B_{j^*}, \dots, B_m] \rightarrow \bar{B} = [B_1, \dots, B_{j^*-1}, B_{j^*+1}, \dots, B_m, P_k].$$

Kolumna bazowa B_{j^*} wychodzi z bazy, kolumna niebazowa P_k wchodzi.



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{j^*}, \dots, \mathbf{B}_m] \rightarrow \overline{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{j^*-1}, \mathbf{B}_{j^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\mathbf{B}_{j^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\mathbf{P}_k$ wchodzi.
Przedstawmy kolumnę niebazową $\mathbf{P}_k$ w starej bazie $\mathbf{B}$

$$y_1^k \mathbf{B}_1 + \dots + y_{j^*-1}^k \mathbf{B}_{j^*-1} + y_{j^*}^k \mathbf{B}_{j^*} + y_{j^*+1}^k \mathbf{B}_{j^*+1} + \dots + y_m^k \mathbf{B}_m = \mathbf{P}_k \quad (1)$$



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{j^*}, \dots, \mathbf{B}_m] \rightarrow \bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{j^*-1}, \mathbf{B}_{j^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{P}_k].$$

Kolumna bazowa $\mathbf{B}_{j^*}$ wychodzi z bazy, kolumna niebazowa $\mathbf{P}_k$ wchodzi.
Przedstawmy kolumnę niebazową $\mathbf{P}_k$ w starej bazie $\mathbf{B}$

$$y_1^k \mathbf{B}_1 + \dots + y_{j^*-1}^k \mathbf{B}_{j^*-1} + y_{j^*}^k \mathbf{B}_{j^*} + y_{j^*+1}^k \mathbf{B}_{j^*+1} + \dots + y_m^k \mathbf{B}_m = \mathbf{P}_k \quad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\mathbf{P}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \mathbf{B}_1 + \dots + y_{j^*-1}^j \mathbf{B}_{j^*-1} + y_{j^*}^j \mathbf{B}_{j^*} + y_{j^*+1}^j \mathbf{B}_{j^*+1} + \dots + y_m^j \mathbf{B}_m = \mathbf{P}_j \quad (2)$$



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$B = [B_1, \dots, B_{i^*}, \dots, B_m] \rightarrow \bar{B} = [B_1, \dots, B_{i^*-1}, B_{i^*+1}, \dots, B_m, P_k].$$

Kolumna bazowa B_{i^*} wychodzi z bazy, kolumna niebazowa P_k wchodzi.
Przedstawmy kolumnę niebazową P_k w starej bazie B

$$y_1^k B_1 + \dots + y_{i^*-1}^k B_{i^*-1} + y_{i^*}^k B_{i^*} + y_{i^*+1}^k B_{i^*+1} + \dots + y_m^k B_m = P_k \quad (1)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową P_j w starej bazie

$$y_1^j B_1 + \dots + y_{i^*-1}^j B_{i^*-1} + y_{i^*}^j B_{i^*} + y_{i^*+1}^j B_{i^*+1} + \dots + y_m^j B_m = P_j \quad (2)$$

Mnożąc (1) przez $\frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$, odejmujemy od (2) i otrzymujemy przedstawienie P_j nowej bazie



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\begin{aligned} & (y_1^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_1^k) \mathbf{B}_1 + \cdots + (y_{i^*-1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*-1}^k) \mathbf{B}_{i^*-1} + (\mathbf{y}_{i^*}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k) \mathbf{B}_{i^*} + \\ & (y_{i^*+1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*+1}^k) \mathbf{B}_{i^*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_m^k) \mathbf{B}_m + \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j \end{aligned}$$



Przedstawienie kolumn niebazowych w nowej bazie

$$\begin{aligned} & (y_1^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_1^k) \mathbf{B}_1 + \cdots + (y_{i^*-1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*-1}^k) \mathbf{B}_{i^*-1} + (\mathbf{y}_{i^*}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k) \mathbf{B}_{i^*} + \\ & (y_{i^*+1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*+1}^k) \mathbf{B}_{i^*+1} + \cdots + (y_m^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_m^k) \mathbf{B}_m + \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j \end{aligned}$$

Współrzędne $\bar{\mathbf{y}}^j$ kolumny $\mathbf{P}_j$ w nowej bazie $\bar{\mathbf{B}}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\bar{\mathbf{y}}_i^j = \begin{cases} \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} & \text{dla } i = k \\ y_i^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_i^k & \text{dla } i \neq k \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$



Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{y}}^j =$$



Nowe wskaźniki optymalności

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^B)^T (\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$$



Nowe wskaźniki optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^B)^T (\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\&= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^j + (\mathbf{c}^B)^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}\end{aligned}$$



Nowe wskaźniki optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^B)^T (\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\&= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^j + (\mathbf{c}^B)^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\&= c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - z_k).\end{aligned}$$



Nowe wskaźniki optymalności

$$\begin{aligned} c_j - \bar{z}_j &= c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^B)^T (\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^j + (\mathbf{c}^B)^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - z_k). \end{aligned}$$

Niech

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{j_*}^k}.$$

Nowe wskaźniki optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^B)^T (\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\&= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^j + (\mathbf{c}^B)^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\&= c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - z_k).\end{aligned}$$

Niech

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k}.$$

Zależność między starym a nowym wskaźnikiem optymalności wyraża się następująco:

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j.$$



Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności



Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności

- dla zmiennej (kolumny) k wchodzącej do bazy

$$c_k - \bar{z}_k = c_k - z_k - \Theta y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0,$$



Nowe wskaźniki optymalności...

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają nowe wskaźniki optymalności

- dla zmiennej (kolumny) k wchodzącej do bazy

$$c_k - \bar{z}_k = c_k - z_k - \Theta y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0,$$

- dla zmiennej (kolumny) i^* wychodzącej z bazy

$$c_{i^*} - \bar{z}_{i^*} = c_{i^*} - z_{i^*} - \Theta y_{i^*}^{i^*} = -\Theta,$$

gdzie $c_{i^*} - z_{i^*} = 0$ (ponieważ kolumna i^* była bazowa), $y_{i^*}^{i^*} = 1$.



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j$$



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i*}^j$$



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \\ &= c_j - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta \text{wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{A}_j\end{aligned}$$



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i*}^j \\&= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{A}_j \\&= c_j - (\pi^T + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1})) \mathbf{A}_j.\end{aligned}$$



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i*}^j \\&= c_j - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{A}_j \\&= c_j - (\pi^T + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1})) \mathbf{A}_j.\end{aligned}$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$\bar{\pi}^T = \pi^T + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}).$$



Nowe rozwiązanie dualne i nowa wartość funkcji celu

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - \bar{\pi}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\mathbf{c}^{\bar{B}})^T \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i*}^j \\&= c_j - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{A}_j \\&= c_j - (\pi^T + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1})) \mathbf{A}_j.\end{aligned}$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$\bar{\pi}^T = \pi^T + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}).$$

Stąd dostajemy zależności wartości funkcji celu dla nowego i starego rozwiązania dualnego:

$$\bar{\pi}^T \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta \text{wiersz}_{i*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta x_{i*}^B.$$



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne $\bar{\pi}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n, \\c_{j^*} - \bar{z}_{j^*} &= -\Theta \geq 0, \quad .\end{aligned}$$



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne $\bar{\pi}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n, \\c_{i^*} - \bar{z}_{i^*} &= -\Theta \geq 0, \quad .\end{aligned}$$

$$\Theta \leq 0 \text{ i } c_j - z_j \geq 0.$$



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy

Nowe rozwiązanie dualne $\bar{\pi}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$\begin{aligned}c_j - \bar{z}_j &= c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n, \\c_{i^*} - \bar{z}_{i^*} &= -\Theta \geq 0, \quad .\end{aligned}$$

$$\Theta \leq 0 \text{ i } c_j - z_j \geq 0.$$

1. jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$, to $c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0$ dla $\Theta \in (-\infty, 0]$,
2. jeśli $y_{i^*}^j < 0$, to $c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0$ dla $\Theta \in \left[\frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j}, 0 \right]$.



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Zachowując warunek optymalności otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Zachowując warunek optymalności otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m + 1, \dots, n \right\}.$$

Indeks ilorazu, k , dla którego jest przyjęte jest maksimum jest indeksem zmiennej (kolumny), która wchodzi do bazy.



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i*}^j < 0$ dla $j = m + 1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i*}^j \geq 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \bar{z}_j \geq 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i*}^j < 0$ dla $j = m + 1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i*}^j \geq 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \bar{z}_j \geq 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\mathbf{x}^B$ było prymalnie dopuszczalne, $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$.



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i^*}^j < 0$ dla $j = m + 1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i^*}^j \geq 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \bar{z}_j \geq 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\mathbf{x}^B$ było prymalnie dopuszczalne, $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x_{i^*}^B < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i^*}^j < 0$ dla $j = m + 1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i^*}^j \geq 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \bar{z}_j \geq 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\mathbf{x}^B$ było prymalnie dopuszczalne, $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x_{i^*}^B < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.
- Stąd wartość funkcji celu zadania dualnego jest nieograniczona z góry (maksymalizujemy ją)!

$$\bar{\pi}^T \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta x_{i^*}^B.$$



Kryterium wejścia zmiennej (kolumny) do bazy...

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i^*}^j < 0$ dla $j = m + 1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i^*}^j \geq 0$), wówczas nowe wskaźniki optymalności są nieujemne jest spełniony ($c_j - \bar{z}_j \geq 0$) dla $\Theta \in (-\infty, 0]$.

Θ ma nieograniczoną wartość!

- Dążymy, aby $\mathbf{x}^B$ było prymalnie dopuszczalne, $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$.
- Pozbywamy się ujemnych składowych $x_{i^*}^B < 0$ - kryterium wyjścia zmiennej (kolumny) i^* z bazy.
- Stąd wartość funkcji celu zadania dualnego jest nieograniczona z góry (maksymalizujemy ją)!

$$\bar{\pi}^T \mathbf{b} = \pi^T \mathbf{b} + \Theta x_{i^*}^B.$$

- Zatem zadanie dualne jest nieograniczone a prymalne sprzeczne - algorytm kończy działanie!



Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego które jest *dualnie dopuszczalne*, a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$.



Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego które jest *dualnie dopuszczalne*, a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$.

Krok 1 Jeżeli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym prymalnie dopuszczalnym, to rozwiązanie $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{0}]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego, STOP.
W przeciwnym przypadku wybierz zmienną x_{i^*} (kolumnę $\mathbf{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, np.

$$x_{i^*} = \min\{x_i^B : x_i^B < 0, i = 1, \dots, m\}.$$



Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\mathbf{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$ dla $j = m+1, \dots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone.
Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.



Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\mathbf{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$ dla $j = m+1, \dots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone.
Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{B}} &:= [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i^*-1}, \mathbf{B}_{i^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_k], \\ \overline{\boldsymbol{\pi}}^T &:= \boldsymbol{\pi}^T + \Theta \text{ wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}), \\ \overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} &:= \overline{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}.\end{aligned}$$



Szkic dualnego algorytmu sympleks...

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\mathbf{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$ dla $j = m+1, \dots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone.
Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{B}} &:= [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i^*-1}, \mathbf{B}_{i^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_k], \\ \bar{\pi}^T &:= \pi^T + \Theta \text{ wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}), \\ \bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} &:= \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Krok 4 Podstaw

$$\mathbf{B} := \bar{\mathbf{B}}, \quad \pi := \bar{\pi}, \quad \mathbf{x} := \bar{\mathbf{x}}.$$

Idź do Kroku 1.



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego modyfikujemy wektor prawych stron $\mathbf{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmienione, ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\mathbf{x}}^B = \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\pi, \tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}}^B$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego modyfikujemy wektor prawych stron $\mathbf{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmiennione, ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\mathbf{x}}^B = \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\pi, \tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}}^B$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.
- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego dodajemy do tego zadania ograniczenie. Zmienna dualna odpowiadająca temu ograniczeniu ma wartość zero. Takie rozwiązanie dualne $\tilde{\pi}$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem. Pojawi się również dodatkowa zmienna uzupełniająca x_{n+1} w zadaniu prymalnym, która może mieć ujemną wartość - ograniczenie dla $[\mathbf{x}^B, \mathbf{0}]$ musi zajść w postaci równości. Mamy więc poszerzone rozwiązanie dopuszczalne zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne. Zatem mamy parę $(\tilde{\pi}, \tilde{\mathbf{x}})$ i w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$$



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ -\mathbf{Ax} + \mathbf{I} \mathbf{x}^s = -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^s \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ -\mathbf{Ax} + \mathbf{I} \mathbf{x}^s = -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^s \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.

Baza początkowa jest postaci $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ a $[\mathbf{x}, \mathbf{x}^s]^T$, gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^s = -\mathbf{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$.



Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny..?

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ -\mathbf{Ax} + \mathbf{I} \mathbf{x}^s = -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^s \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^m$ - zm. uzupełniających.

Baza początkowa jest postaci $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ a $[\mathbf{x}, \mathbf{x}^s]^T$, gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^s = -\mathbf{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$.

Zatem $[\mathbf{0}, \mathbf{x}^s]^T$ jest dualnie dopuszczalne. Możemy również w tym przypadku zastosować dualny algorytm.



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek

-  Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło.
Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL.
Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.
-  Ireneusz Nykowski.
Programowanie liniowe.
PWE, Warszawa, 1980.

