

1 Dualny algorytm sympleks

Rozważmy zadanie prymalne w postaci standardowej

$$\mathbb{X}_P = \begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

odpowiadające zadanie jest dualne jest postaci:

$$\mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}_D = \begin{cases} \max \mathbf{b}^T \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem m zmiennych decyzyjnych dualnych nieograniczonych co do znaku.

Prymalny algorytm sympleks, który wcześniej poznaliśmy, rozwiązujący zadanie prymalne w postaci standardowej (1) startuje od rozwiązania bazowego dopuszczalnego i w każdym kroku r konstruuje sąsiednie rozwiązanie bazowe dopuszczalne (wymienia kolumnę, zmienną, bazową z kolumną, zmienną, niebazową). Jeśli aktualne rozwiązanie bazowe dopuszczalne $\mathbf{x}^{(r)}$, tj. $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(r)} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^{(r)} = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$, gdzie $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$, a macierz $\mathbf{B}$ jest bazą, spełnia warunek optymalności

$$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad (3)$$

wówczas algorytm kończy działanie.

Przypomnijmy również parę faktów. Mianowicie, warunek optymalności (3) wyraża również dopuszczalność rozwiązania dualnego $\boldsymbol{\pi}^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$. Wiemy, że $\mathbf{c}^T = [c_1, \dots, c_n]$, $\mathbf{z}^T = [z_1, \dots, z_n]^T$, $z_k = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{y}^k = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_k$, a $\mathbf{A}_k$ jest k -tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \mathbf{z}^T &\geq \mathbf{0}^T, \\ \mathbf{c}^T - [(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_1, \dots, (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_n] &\geq \mathbf{0}^T, \\ \mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n] &\geq \mathbf{0}^T, \\ \mathbf{c}^T - (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} &\geq \mathbf{0}^T, \\ (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} &\leq \mathbf{c}^T. \end{aligned}$$

Oznaczając $(\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ przez $\boldsymbol{\pi}^T$ dostajemy rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego (2):

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T. \quad (4)$$

Przyjmijmy (jak do tej pory), że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe. Z twierdzenia o optymalności (zob. twierdzenie 2 wykłady nr 4 i 5) warunek

optymalności (3) możemy zapisać bardziej szczegółowo:

$$\begin{cases} c_j - z_j = 0 & \text{dla } j = 1, \dots, m, \\ c_j - z_j \geq 0 & \text{dla } j = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Równoważna postać jest następująca:

$$\begin{cases} \pi^T \mathbf{A}_j = c_j & \text{dla } j = 1, \dots, m, \\ \pi^T \mathbf{A}_j \geq c_j & \text{dla } j = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

Widzimy, że dla zmiennych bazowych (kolumn bazowych), rozwiązania bazowego dopuszczalnego $\mathbf{x}$, odpowiadające im ograniczenia w zadaniu dualnym (2) zachodzą w postaci równości dla rozwiązania π^T , a dla niebazowych zachodzą w postaci nierówności.

Podsumowując prymalny algorytm sympleks startuje od rozwiązania dopuszczalnego zadania prymalnego (1) i w każdym kroku zachowuje dopuszczalność konstruowanego rozwiązania dążąc, niejawnie, do dualnej dopuszczalności - równoważnie do spełnienia warunku optymalności (3), w którym zawarta jest informacja o rozwiązaniu dopuszczalnym zadania dualnego (zob. (4)). Natomiast *dualny* algorytm sympleks startuje od rozwiązania dopuszczalnego zadania dualnego (2) i w każdym kroku zachowuje dopuszczalność konstruowanego rozwiązania dualnego (spełniając warunek optymalności (3)) dążąc, niejawnie, do dopuszczalności prymalnej - co jest równoważne z istnieniem dopuszczalnego rozwiązania zadania prymalnego (1).

Przedstawmy powyższą ideę dualnego algorytmu sympleks bardziej szczegółowo. Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne*, czyli spełnienia warunek optymalności (3), a co za tym idzie istnieje opowiadające rozwiązanie dopuszczalne π zadania dualnego (2). Jeśli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$, wówczas algorytm kończy działanie, ponieważ $\mathbf{x}^B$ jest *prymalnie dopuszczalne* i spełnienia warunek optymalności - jest dualnie dopuszczalne. W przeciwnym przypadku, gdy $\mathbf{x}^B \not\geq \mathbf{0}$, tj. zawiera ujemne składowe, algorytm dąży ku dopuszczalności prymalnej rozwiązania bazowego $\mathbf{x}^B$, pozbywając się ujemnych składowych $\mathbf{x}^B$, zachowując jednocześnie jego optymalność (dualną dopuszczalność) i maksymalizując wartość dualnej funkcji celu $\mathbf{b}^T \pi$. Kończy działanie po skończonej liczbie kroków, gdy $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$. Wtedy oczywiście zachodzi równość $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \pi$. Z wniosku 1 z twierdzenia o słabej dualności (zob. wykład 6) wynika, że $\mathbf{x}$ i π są, odpowiednio, rozwiązaniami optymalnymi zadania prymalnego i dualnego. Stąd w rzeczywistości algorytm dualny sympleks rozwiązuje zadanie prymalne. Porównanie idei prymalnego i dualnego algorytmu sympleks znajduje się w tabeli 1.

Krok dualnego algorytmu sympleks

Przedstawimy teraz krok dualnego algorytmu sympleks oraz pokażemy jak zmieniają się wskaźniki optymalności, jaka jest postać nowego rozwiąza-

Tabela 1: Porównanie idei prymalnego i dualnego algorytmu sympleks, gdzie $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$ oznacza prymalną dopuszczalność rozwiązania $\mathbf{x}^B$ a $\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ ($\pi^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$) jego dualną dopuszczalność.

algorytm prymalny			algorytm dualny		
$\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \not\geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \not\leq \mathbf{c}^T$	$\mathbf{x}^B \not\geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$
$\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \not\leq \mathbf{c}^T$	$\mathbf{x}^B \not\geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$	$\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{c} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$	$\pi^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$
W każdym kroku: wybieramy kolumnę $\mathbf{A}_k$, która wchodzi do bazy $\mathbf{B}$; wybieramy kolumnę $\mathbf{A}_{i^*}$, która wychodzi z bazy $\mathbf{B}$.			W każdym kroku: wybieramy kolumnę $\mathbf{A}_{i^*}$, która wychodzi z bazy $\mathbf{B}$; wybieramy kolumnę $\mathbf{A}_k$, która wchodzi do bazy $\mathbf{B}$.		

nia dualnego oraz wartości funkcji celu zadania dualnego dla nowego rozwiązania dualnego.

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne* (spełnienia warunek optymalności (3)) a $\pi^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ będzie odpowiadającym rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego. Zakładamy, że pierwsze m kolumn to kolumny bazowe oraz kolumna i^* (zmienna) wychodzi z bazy, kolumna (zmienna) k wchodzi do bazy (kryterium wejścia kolumny (zmiennej) do bazy podamy później, kryterium wyjścia kolumny (zmiennej) jest związane z ujemnymi składowymi rozwiązania bazowego - pozbywamy się ujemnych składowych).

Niech $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i^*-1}, \mathbf{B}_{i^*}, \mathbf{B}_{i^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m]$ będzie starą bazą a $\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i^*-1}, \mathbf{B}_{i^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_k]$ będzie nową bazą. Kolumna $\mathbf{B}_{i^*}$ wychodzi z bazy natomiast kolumna $\mathbf{A}_k$ wchodzi do bazy. Przedstawmy kolumnę niebazową $\mathbf{A}_k$ w starej bazie $\mathbf{B}$

$$y_1^k \mathbf{B}_1 + \dots + y_{i^*-1}^k \mathbf{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^k \mathbf{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^k \mathbf{B}_{i^*+1} + \dots + y_m^k \mathbf{B}_m = \mathbf{A}_k \quad (7)$$

Przedstawmy kolumnę niebazową $\mathbf{A}_j$ w starej bazie

$$y_1^j \mathbf{B}_1 + \dots + y_{i^*-1}^j \mathbf{B}_{i^*-1} + y_{i^*}^j \mathbf{B}_{i^*} + y_{i^*+1}^j \mathbf{B}_{i^*+1} + \dots + y_m^j \mathbf{B}_m = \mathbf{A}_j \quad (8)$$

Mnożąc (7) przez $\frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k}$, odejmujemy od (8) i otrzymujemy przedstawienie $\mathbf{P}_j$ nowej bazie

$$\begin{aligned} & (y_1^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_1^k) \mathbf{B}_1 + \dots + (y_{i^*-1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*-1}^k) \mathbf{B}_{i^*-1} + (y_{i^*}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k) \mathbf{B}_{i^*} + \\ & (y_{i^*+1}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_{i^*+1}^k) \mathbf{B}_{i^*+1} + \dots + (y_m^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_m^k) \mathbf{B}_m + \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_j \end{aligned}$$

Współrzędne $\bar{\mathbf{y}}^j$ kolumny $\mathbf{A}_j$ w nowej bazie $\bar{\mathbf{B}}$ wyznaczamy ze wzoru

$$\bar{y}_i^j = \begin{cases} \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} & \text{dla } i = k \\ y_i^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} y_i^k & \text{dla } i \neq k \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

Nowe wskaźniki optymalności są postaci:

$$\begin{aligned} c_j - \bar{z}_j &= c_j - (\bar{\mathbf{c}}^T) \bar{\mathbf{y}}^j = c_j - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \left(\mathbf{y}^j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k \right) - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \mathbf{y}^j + (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \mathbf{y}^k - c_k \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} \\ &= c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \mathbf{y}^k) = c_j - z_j - \frac{y_{i^*}^j}{y_{i^*}^k} (c_k - z_k). \end{aligned}$$

Niech $\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k}$. Zależność między starym a nowym wskaźnikiem optymalności wyraża się następująco:

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j. \quad (9)$$

Sprawdźmy teraz jak wygląda nowe rozwiązanie dualne

$$\begin{aligned} c_j - \bar{z}_j &= c_j - \bar{\boldsymbol{\pi}}^T \mathbf{A}_j = c_j - (\bar{\mathbf{c}}^T) \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \\ &= c_j - (\mathbf{c}^{\mathbf{B}})^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j - \Theta \text{wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{A}_j \\ &= c_j - (\boldsymbol{\pi}^T + \Theta \text{wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1})) \mathbf{A}_j. \end{aligned}$$

Zatem zależność między starym a nowym rozwiązaniem dualnym jest następująca:

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}^T = \boldsymbol{\pi}^T + \Theta \text{wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}). \quad (10)$$

Stąd dostajemy zależności wartości funkcji celu dla nowego i starego rozwiązania dualnego:

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}^T \mathbf{b} = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b} + \Theta \text{wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}) \mathbf{b} = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{b} + \Theta x_{i^*}^{\mathbf{B}}. \quad (11)$$

Sprawdźmy jeszcze jak wyglądają (5) dla kolumn k i i^* po wymianie

$$\begin{aligned} c_k - \bar{z}_k &= c_k - z_k - \Theta y_{i^*}^k = c_k - z_k - \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} y_{i^*}^k = 0 \\ c_{i^*} - \bar{z}_{i^*} &= c_{i^*} - z_{i^*} - \Theta y_{i^*}^{i^*} = -\Theta, \end{aligned}$$

gdzie $c_{i^*} - z_{i^*} = 0$ (ponieważ kolumna i^* była bazowa), $y_{i^*}^{i^*} = 1$.

Podamy teraz kryterium wejścia kolumny do bazy. Musimy zachować dualną dopuszczalność, nowe rozwiązanie dualne $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ musi być dopuszczalne. Zatem wymuszamy warunek optymalności

$$c_j - \bar{z}_j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n.$$

Z (9) dostajemy

$$c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Ponadto

$$c_{i^*} - \bar{z}_{i^*} = -\Theta \geq 0.$$

Zatem mamy $\Theta \leq 0$. Zauważ, że stare wskaźniki optymalności są nieujemne, $c_j - z_j \geq 0$. Stąd mamy dwa przypadki:

1. jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$, to $c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0$ dla $\Theta \in (-\infty, 0]$,
2. jeśli $y_{i^*}^j < 0$, to $c_j - \bar{z}_j = c_j - z_j - \Theta y_{i^*}^j \geq 0$ dla $\Theta \in \left[\frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j}, 0 \right]$.

Zachowując warunek optymalności (12) otrzymujemy kryterium wejścia do bazy:

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$

Indeks ilorazu, k , dla którego jest przyjęte jest maksimum jest indeksem kolumny, która wchodzi do bazy.

Może pojawić się problem z istnieniem $y_{i^*}^j < 0$ dla $j = m+1, \dots, n$ (dla $j = 1, \dots, m$, $y_{i^*}^j \geq 0$), wówczas (12) jest spełniony dla $\Theta \in (-\infty, 0]$ (Θ ma nieograniczoną wartość). Wtedy nowe dopuszczalne rozwiązanie dualne $\bar{\pi}$ (10) nie jest skończone. Ponadto $x_{i^*}^B < 0$ (pozbywamy się ujemnych składowych) wartość funkcji celu zadania dualnego (11) nie jest ograniczona z góry (maksymalizujemy ją). Zatem zadanie dualne jest nieograniczone a prymalne sprzeczne (zob. wniosek 2, wykład 6) - algorytm kończy działanie.

Szkic dualnego algorytmu sympleks

Niech $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ będzie rozwiązaniem bazowym zadania prymalnego (1), które jest *dualnie dopuszczalne* (spełnienia warunek optymalności (3)), a co za tym idzie istnieje rozwiązanie dopuszczalne zadania dualnego postaci $\boldsymbol{\pi}^T = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$.

Krok 1 Jeżeli $\mathbf{x}^B \geq \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym prymalnie dopuszczalnym (wszystkie składowe są nieujemne), to rozwiązanie $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}^B, \mathbf{0}]^T$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania prymalnego (1), STOP.

W przeciwnym przypadku wybierz zmienną x_{i^*} (kolumnę $\mathbf{B}_{i^*}$), która wychodzi z bazy, np.

$$x_{i^*} = \min\{x_i^B : x_i^B < 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Krok 2 Wybierz zmienną x_k (kolumnę $\mathbf{A}_k$), która wchodzi do bazy

$$\Theta = \frac{c_k - z_k}{y_{i^*}^k} = \max \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{i^*}^j} : y_{i^*}^j < 0, j = m+1, \dots, n \right\}.$$

Jeśli $y_{i^*}^j \geq 0$ dla $j = m+1, \dots, n$, to zadanie dualne jest nieograniczone (nie skończonego rozwiązania). Zatem zadanie prymalne jest sprzeczne, STOP.

Krok 3 Uaktualnij:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &:= [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i^*-1}, \mathbf{B}_{i^*+1}, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_k], \\ \bar{\boldsymbol{\pi}}^T &:= \boldsymbol{\pi}^T + \Theta \text{ wiersz}_{i^*}(\mathbf{B}^{-1}), \\ \bar{\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} &:= \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Krok 4 Podstaw:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &:= \bar{\mathbf{B}}, \\ \boldsymbol{\pi} &:= \bar{\boldsymbol{\pi}}, \\ \mathbf{x} &:= \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Idź do Kroku 1.

Kiedy dualny algorytm sympleks jest użyteczny?

Dualny algorytm sympleks jest użyteczny, kiedy dysponujemy parą rozwiązań, w której $\boldsymbol{\pi}$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dualnego a $\mathbf{x}$ jest prymalnie niedopuszczalne (ma ujemne składowe). Poniżej niektóre ważne z praktycznego punktu widzenia przypadki.

- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego (1) modyfikujemy wektor prawych stron $\mathbf{b}$. Wówczas wskaźniki optymalności pozostają niezmienione (3), ale nowe rozwiązanie bazowe $\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}$ może zawierać składowe ujemne. Ponieważ mamy parę $(\boldsymbol{\pi}, \tilde{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{B}}$ jest dualnie dopuszczalne w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.
- ("warm start") Po rozwiązaniu zadania prymalnego (1) dodajemy do tego zadania ograniczenie. Zmienna dualna odpowiadająca temu ograniczeniu ma wartość zero. Takie rozwiązanie dualne $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem. Pojawi się również dodatkowa zmienna uzupełniająca x_{n+1} w zadaniu prymalnym, która może mieć ujemną wartość - ograniczenie dla $[\mathbf{x}^{\mathbf{B}}, \mathbf{0}]$ musi zajść w postaci równości. Mamy więc poszerzone rozwiązanie dopuszczalne zadania prymalnego, które jest dualnie dopuszczalne. Zatem mamy parę $(\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\mathbf{x}})$ i w tym przypadku stosujemy algorytm dualny.

- Załóżmy, że mamy zadanie prymalne w postaci kanonicznej, w którym $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \begin{cases} \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Doprowadzamy to zadanie do postaci standardowej przez wprowadzenie zmiennych uzupełniających:

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \begin{cases} -\mathbf{Ax} + \mathbf{I} \mathbf{x}^s = -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^s \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{x}^s \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem zmiennych uzupełniających. W tym przypadku baza początkowa jest postaci $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ a $[\mathbf{x}, \mathbf{x}^s]^T$, gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^s = -\mathbf{b}$, jest rozwiązaniem bazowym prymalnie niedopuszczalnym. Odpowiadające rozwiązanie dualne jest postaci $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$. Zatem $[\mathbf{0}, \mathbf{x}^s]^T$ jest dualnie dopuszczalne. Możemy również w tym przypadku zastosować dualny algorytm.

Uwagi na temat treści wykładu

Część wykładu została przygotowana na podstawie książek [1, 2].

Literatura

- [1] Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik, Maciej M. Sysło. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL*. Wydawnictwa Naukowego PWN, 1999.
- [2] Ireneusz Nykowski. *Programowanie liniowe*. PWE, Warszawa, 1980.