

1 Problem programowania liniowego

Egzemplarz problemu programowania liniowego w najbardziej ogólnej postaci można zdefiniować następująco:

Postać ogólna

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{j \in [n]} c_j x_j \quad (1)$$

$$\text{przy warunkach } \sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in M_{=} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in M_{\leq} \quad (3)$$

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in M_{\geq} \quad (4)$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in N_{\geq} \quad (5)$$

$$x_j \leq 0 \quad j \in N_{\leq} \quad (6)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad j \in N_{\mathbb{R}} \quad (7)$$

gdzie danymi są: $m = |M_{=}| + |M_{\leq}| + |M_{\geq}|$, $n = |N_{\geq}| + |N_{\leq}| + |N_{\mathbb{R}}|$, macierz ograniczeń $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wektor prawych stron $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ i wektor współczynników funkcji celu $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych.

Postać kanoniczna

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{przy warunkach } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Postać standardowa

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{przy warunkach } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Równoważność postaci

Okazuje się, że powyższe postacie są sobie równoważne w takim sensie, że za pomocą prostych transformacji możemy przekształcić egzemplarz jednej postaci do egzemplarza drugiej postaci i te dwa egzemplarze mają te same rozwiązanie. Mianowicie

Przejdzie z postaci ogólnej do kanonicznej:

1. ograniczenia (3) mnożymy obustronnie przez -1 ,
2. zmienne decyzyjne $x_j \leq 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geq 0$, i ograniczenia (6) mnożymy obustronnie przez -1 ,
3. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geq 0$ i $x_j^- \geq 0$.

Przejdzie z postaci ogólnej do standardowej:

1. zmienne decyzyjne $x_j \leq 0$ zastępujemy następująco $x_j = -x_j^-$, gdzie $x_j^- \geq 0$, i ograniczenia (6) mnożymy obustronnie przez -1 ,
2. zmienne decyzyjne $x_j \in \mathbb{R}$ zastępujemy różnicą dwóch nieujemnych zmiennych decyzyjnych, tzn. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdzie $x_j^+ \geq 0$ i $x_j^- \geq 0$,
3. ograniczenie (3) sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (niedoboru), tj.

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0,$$

4. ograniczenie (4) sprowadzamy do ograniczenia równościowego przez wprowadzenie nieujemnej zmiennej dodatkowej (nadmiaru), tj.

$$\sum_{j \in [n]} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Ponadto, jeśli maksymalizujemy funkcję celu, w którejś postaci, wówczas wystarczy pomnożyć przez -1 jej współczynniki i minimalizować zmodyfikowaną funkcję celu, tzn. $\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ jest równoważne $\min -\mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

2 Teoretyczne podstawy algorytmu sympleks

O tego momentu będziemy rozpatrywali zagadnienie programowania liniowego w postaci standardowe (z min):

$$\mathbb{X} = \begin{cases} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$), $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Założenie 1. $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.

Ograniczenia $Ax = b$ możemy zapisać:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^B \\ x^P \end{bmatrix} = b$$

gdzie $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\text{rank}(B) = m$ (z założenia 1), $P \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $x^B \in \mathbb{R}^m$ i $x^P \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Definicja 1. Rozwiązanie $x = [x^B, x^P]^T$, takie, że $x^B = B^{-1}b$ i $x^P = 0$, nazywamy rozwiązaniem bazowym układu $Ax = b$ a podmacierz B bazą.

Jeśli dodatkowo $x \geq 0$, to mówimy, że x jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Założenie 2. $X \neq \emptyset$.

Definicja 2. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Punkt $x \in U$ nazywamy wierzchołkiem zbioru wypukłego U , jeśli nie istnieją dwa punkty $u, v \in U$ różne od x i $\lambda \in (0, 1)$, że x jest ich ścisłą wypukłą kombinacją, tj.

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v.$$

Twierdzenie 1. Rozwiązanie $x \in X$ jest wierzchołkiem zbioru X wtedy i tylko wtedy x jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $Ax = b$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $x \in X$ będzie wierzchołkiem zbioru X . Jeśli $x = 0$, wówczas z założenia 1 natychmiast dostajemy, że x jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $Ax = b$.

Założmy, że w x istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia oraz x nie jest rozwiązaniem bazowym (dowód nie wprost). Zatem jego składowe można podzielić na $[x^G, x^P]^T$, gdzie $x^G > 0$ i $x^P = 0$.

Ograniczenia $Ax = b$ możemy zapisać:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} G & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^G \\ x^P \end{bmatrix} = b \quad (8)$$

Ponieważ x nie jest rozwiązaniem bazowym, macierz G ma liniowo zależne kolumny. Stąd istnieje wektor $w \neq 0$ taki, że $Gw = 0$. Ograniczenia (8) możemy zapisać:

$$Gx^G + Gw = b \Leftrightarrow G(x^G \pm \alpha w) = b \text{ dla } \alpha \neq 0.$$

Z faktu, że $x^G > 0$ wynika, że możemy tak dobrać $\alpha \neq 0$, aby $x^G \pm \alpha w > 0$. Stąd otrzymujemy dwa wektory:

$$u = \begin{bmatrix} x^G \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i } v = \begin{bmatrix} x^G \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix}$$

takie, że $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ponadto łatwo zauważyć, że

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Stąd $\lambda = 1/2$. Co przeczy, że $\mathbf{x}$ jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathbf{x}$ nie jest wierzchołkiem zbioru $\mathbb{X}$ (dowód nie wprost). Stąd istnieją $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X}$ różne od $\mathbf{x}$ i $\lambda \in (0, 1)$ takie, że

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}.$$

Rozwiązanie $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^P]^T$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}^P = \mathbf{0}$ i $\mathbf{Bx}^B = \mathbf{b}$. Zapiszmy

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^B \\ \mathbf{u}^P \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^B \\ \mathbf{v}^P \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v}$. Zatem $\mathbf{x}^P = \lambda\mathbf{u}^P + (1 - \lambda)\mathbf{v}^P$. Z faktu, że $\lambda \in (0, 1)$ wynika, że $\mathbf{u}^P = \mathbf{v}^P = \mathbf{0}$. Więc

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{Au} = \mathbf{b}, \mathbf{Av} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx}^B = \mathbf{b}, \mathbf{Bu}^B = \mathbf{b}, \mathbf{Bv}^B = \mathbf{b}.$$

Wiemy, że $\text{rank}(\mathbf{B}) = m$

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{u}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{v}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

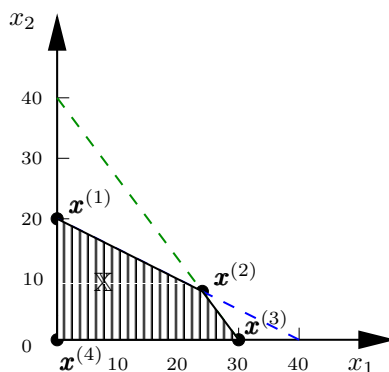
Zatem $\mathbf{x}^B = \mathbf{u}^B = \mathbf{v}^B$. Stąd i $\mathbf{x}^P = \mathbf{u}^P = \mathbf{v}^P = \mathbf{0}$ dostajemy $\mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{v}$ - sprzeczność. $\square$

Fakt 1. Maksymalna liczba rozwiązań bazowych układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$) wynosi $\binom{n}{m}$.

Fakt 2. Liczba rozwiązań bazowych dopuszczalnych (wierzchołków) nie może przekroczyć $\binom{n}{m}$.

Przykład 1.

$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \mathbb{X}' = \begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= [0, \quad 20, \quad 15, \quad 0 \quad] \\ \mathbf{x}^{(2)} &= [24, \quad 8, \quad 0, \quad 0 \quad] \\ \mathbf{x}^{(3)} &= [30, \quad 0, \quad 0, \quad 20 \quad] \\ \mathbf{x}^{(4)} &= [0, \quad 0, \quad 30, \quad 80 \quad] \\ \mathbf{x}^{(5)} &= [40, \quad 0, \quad -10, \quad 0 \quad] \\ \mathbf{x}^{(6)} &= [0, \quad 40, \quad 0, \quad -80 \quad] \end{aligned}$$

Fakt 3. Istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne takie, że każdemu wierzchołkowi w zbiorze $\mathbb{X}$ odpowiada wierzchołek w zbiorze $\mathbb{X}'$.

Twierdzenie 2. Jeżeli założenia 1 i 2 są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma co najmniej jeden wierzchołek (rozwiązanie bazowe dopuszczalne).

Dowód. Z założenia 2 mamy, że $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Wybierzmy $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$. Uporządkujmy składowe $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0], \quad x_j > 0 \quad j \in [t].$$

Założmy, że $t > 0$. W przeciwnym przypadku ($t = 0$) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ponieważ $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ (założenie 1), wówczas $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym (zdegenerowanym). Kontynuując ($t > 0$) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jest postaci

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \dots + \mathbf{A}_t x_t = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{A}_j$ jest j -tą kolumną macierzy $\mathbf{A}$. Niech $r = \text{rank}([\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t])$. Oczywiście $r \leq \text{rank}(\mathbf{A})$ oraz $r > 0$. W przeciwnym przypadku ($r = 0$) znowu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym, ponieważ $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek, $r = t \leq m$. Ponieważ $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ z $n - t$ kolumn wybieramy $m - t$ kolumn, aby z t kolumnami tworzyły m kolumn liniowo niezależnych. Wtedy $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0]$ jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym. Ponadto, jeśli $t < m$ jest rozwiązaniem zdegenerowanym.

Przypadek $r < t$. Stąd podmacierz $\bar{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$,

jest nieosobliwa. Istnieje, więc $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$. Stąd możemy wyrazić składowe $x_1, \dots, x_r$ wektora $\mathbf{x}$ za pomocą jego składowych $x_{r+1}, \dots, x_t$. Jest oczywiste, że układ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ można zapisać (pierwsze r ograniczeń):

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{b}',$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}} = [x_1, \dots, x_r]$, $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = [x_{r+1}, \dots, x_t]$, $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^r$. Wektor postaci:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b}' - \bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\bar{\mathbf{x}}}.$$

Podstawiając $\beta = \bar{A}^{-1}b'$ i $\alpha = -\bar{A}^{-1}\bar{A}$. Składowe $\bar{x}$ mają postać

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i \quad j \in [r].$$

Konstruujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne $\hat{x}$, które będzie miało o co najmniej jedną składową zerową więcej niż x

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}\hat{x}_i & \text{dla } j < r+1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$, $\beta_j = x_j - \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i$. Przyjrzyjmy się składowym $\hat{x}_j$, $j \in [r]$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}\hat{x}_i = \beta_j + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i - \theta\alpha_{r+1j} \\ &= x_j - \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i + \sum_{i=r+1}^t \alpha_{ij}x_i - \theta\alpha_{r+1j} = x_j - \theta\alpha_{r+1j}. \end{aligned}$$

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta & \text{dla } j = r+1, \\ x_j & \text{dla } j > r+1, \\ x_j - \theta\alpha_{r+1j} & \text{dla } j < r+1. \end{cases}$$

Wymuszamy $\hat{x} \geq 0$. Stąd

$$\begin{cases} x_{r+1} - \theta \geq 0, \\ x_j - \alpha_{r+1j}\theta \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{r+1} \geq \theta, \\ x_j \geq \alpha_{r+1j}\theta. \end{cases}$$

Wybieramy $\theta_1 = \min \left\{ \frac{x_j}{\alpha_{r+1j}} : \alpha_{r+1j} > 0, j \in [r] \right\}$, $\theta = \min\{x_{r+1}, \theta_1\}$.

Jeżeli $\theta = x_{r+1}$, to $\hat{x}_{r+1} = 0$. Jeżeli $\theta = \theta_1 = \frac{x_k}{\alpha_{r+1k}}$, to $\hat{x}_k = 0$, $k < r+1$. Zatem $\hat{x} \in \mathbb{X}$ i ma co najmniej jedną składową zerową więcej niż x . Powtarzając to rozumowanie możemy otrzymać rozwiązanie dla, którego $r = t$. Wtedy otrzymujemy pierwszy przypadek ($r = t$). $\square$

Wniosek 1. Jeżeli założenia 1 i 2 są spełnione, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ ma skończoną liczbę wierzchołków.

Pytanie Czy zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathbb{X}$ jest domknięty i ograniczony?

Jeśli odpowiedź brzmi "tak", wówczas z twierdzenia Weierstrassa $c^T x$ przyjmuje wartość największą oraz najmniejszą w $\mathbb{X}$.

Domkniętość $\mathbb{X}$ wynika z postaci ograniczeń $Ax = b$, $x \geq 0$.

Założenie 3. Funkcja $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ jest ograniczona z dołu na zbiorze $\mathbb{X}$ (problem minimalizacji), tj. zbiór $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}$ jest z dołu ograniczony.

Lemat 1. Niech $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ będzie rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym układu $(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m)$. Wtedy

$$|x_j| \leq m! \alpha^{m-1} \beta,$$

gdzie $\alpha = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$ i $\beta = \max_i \{|b_i|\}$.

Dowód. Oszacowanie jest oczywiste, jeśli x_i nie jest zmienną bazową - wtedy $x_i = 0$.

Założmy, że x_i jest zmienną bazową. Wtedy

$$x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b} \quad \text{jest sumą } m \text{ iloczynów.}$$

Każdy element macierzy $\mathbf{B}^{-1}$ jest ilorazem $\pm \det(\mathbf{B}_{ij})$, $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{Z}^{(m-1) \times (m-1)}$, i $\det(\mathbf{B})$. Ponieważ $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, $|\det(\mathbf{B})| \geq 1$. Wiadomo

$$\det(\mathbf{B}_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_{m-1}} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m-1\sigma(m-1)}, \quad \text{dla } i = m, j = m,$$

gdzie S_{m-1} jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, m-1\}$ a $\text{Inv}(\sigma)$ oznacza liczbę inwersji danej permutacji σ . Widać, że $\det(\mathbf{B}_{ij})$ jest sumą $(m-1)!$ iloczynów $m-1$ składników. Zatem $|\det(\mathbf{B}_{ij})| \leq (m-1)! \alpha^{m-1}$. Stąd i z faktu, że $x_i = \text{wiersz}_i(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b}$, który jest sumą m iloczynów, mamy ograniczenie $m! \alpha^{m-1} \beta$. $\square$

Twierdzenie 3. Jeżeli założenia 1 2 i 3 są spełnione, to problemy:

$$\begin{array}{ll} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{przy warunkach } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \text{przy warunkach } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & x_j \leq M \quad j \in [n] \end{array}$$

są równoważne, tj. ich optymalne wartości funkcji celu są sobie równe, gdzie

$$M = (m+1)! \alpha^m \beta, \alpha = \max\{|a_{ij}|, |c_j|\}, \beta = \max\{|b_i|, |z|\},$$

z jest największym dolnym ograniczeniem zbioru $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Dowód. Jest oczywiste, że $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ jest domknięty. Zatem istnieje $\mathbf{x}$ taki, że $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Rozważmy teraz układ ograniczeń:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{c}^T \mathbf{x} & = z \\ \mathbf{Ax} & = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Układ nie jest sprzeczny. Wszystkie jego rozwiązania są optymalne.

Rozważmy dwa przypadki. Pierwszy przypadek. Macierz układu jest rzędu $m+1$. Wtedy z twierdzenia 2 układ posiada co najmniej jedno rozwiązanie bazowe dopuszczalne. Jego składowe x_j spełniają ograniczenia $x_j \leq M$, $j \in [n]$ (zob. lemat 1). Ograniczenia nie wpływają na rozwiązania optymalne oryginalnego problemu.

Drugi przypadek. Macierz układu jest rzędu m . Wtedy $\mathbf{c}^T$ można przedstawić jako kombinację liniową wierszy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{c}^T = \sum_{i \in [m]} \gamma_i \mathbf{a}^T \text{ i } \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i, \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

Wszystkie rozwiązania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ mają stały koszt $\sum_{i \in [m]} \gamma_i b_i$. Istnieje rozwiązanie optymalne bazowe dopuszczalne, którego składowe x_j oczywiście (zob. lemat 1) spełniają ograniczenia $x_j \leq M$, $j \in [n]$. $\square$

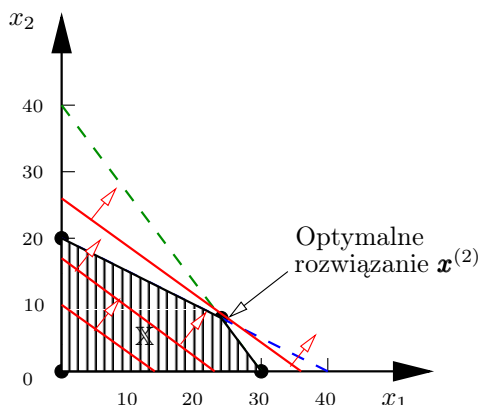
Od tego momentu możemy założyć, że

Założenie 4. Zbiór $\mathbb{X}$ jest ograniczony.

Geometryczna interpretacja problemu programowania liniowego

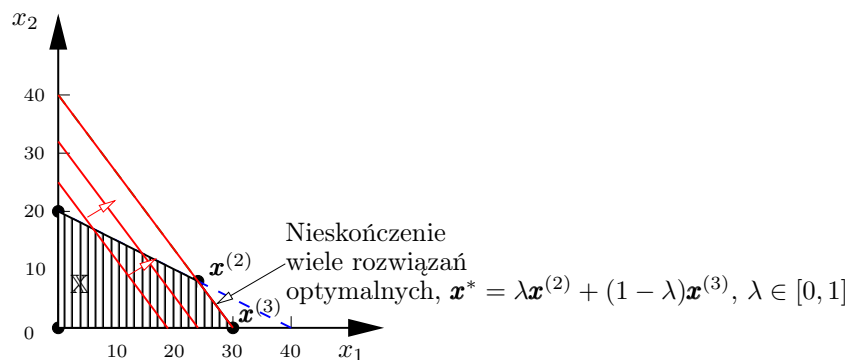
Przykład 2.

$$\begin{aligned} -4x_1 - 5x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



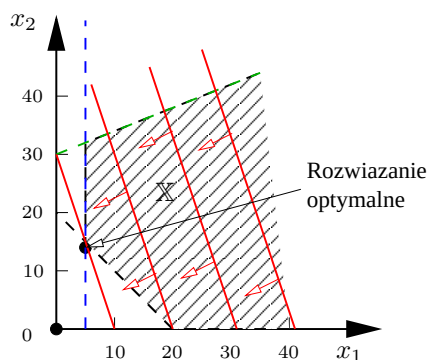
Przykład 3.

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

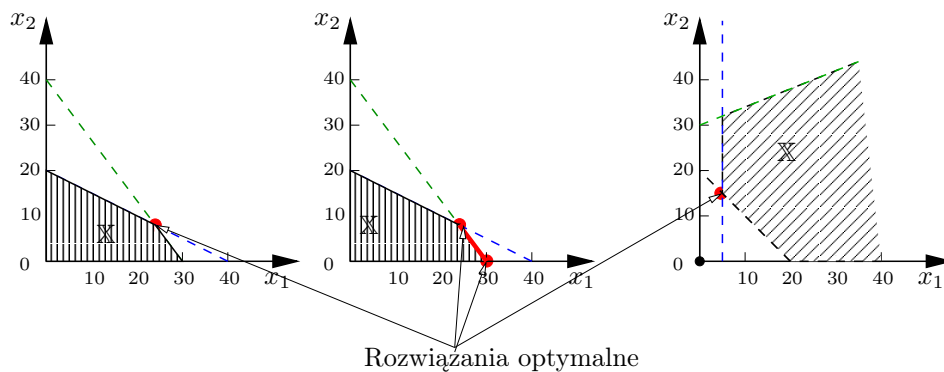


Przykład 4.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\geq 20 \\ -x_1 + 2.5x_2 &\leq 75 \\ x_1 &\geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Własność problemu liniowego programowania



Twierdzenie 4. Jeżeli założenia 1, 2 i 4 są spełnione, to $c^T x$ przyjmuje wartość najmniejszą w X w co najmniej jednym wierzchołku tego zbioru.

Jeżeli kilka wierzchołków $\mathbb{X}$ reprezentuje rozwiązanie optymalne, to wypukłą kombinacją tych wierzchołków jest także rozwiązaniem optymalnym.

Zanim udowodnimy twierdzenie 4, podamy (bez dowodu) twierdzenie pomocnicze.

Twierdzenie 5. *Jeżeli $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ jest wielościanem wypukłym, każdy punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ można przedstawić jako wypukłą kombinację jego wierzchołków $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell$, tzn.*

$$\mathbf{x} = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j,$$

gdzie $\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = 1$ i $\lambda_j \geq 0$, $j \in [\ell]$.

Inaczej

$$\mathbb{X} = \text{conv}(\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell),$$

$\text{conv}(\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell)$ jest otoczką wypukłą punktów $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^\ell$.

Dowód. (twierdzenie 4) Niech $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}$ będzie rozwiązaniem optymalnym, tj. $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Z twierdzenia 5 $\mathbf{x}^*$ możemy przedstawić:

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j, \lambda_j \geq 0, j \in [\ell], \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = 1,$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}^j$ są wierzchołkami $\mathbb{X}$. Zatem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j.$$

Niech $\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r = \min_{j \in [\ell]} \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j$. Stąd

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j \geq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r \sum_{j \in [\ell]} \lambda_j = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r.$$

Ponieważ $\hat{\mathbf{x}}^r \in \mathbb{X}$, to $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r$. Ostatecznie dostajemy $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^r$.

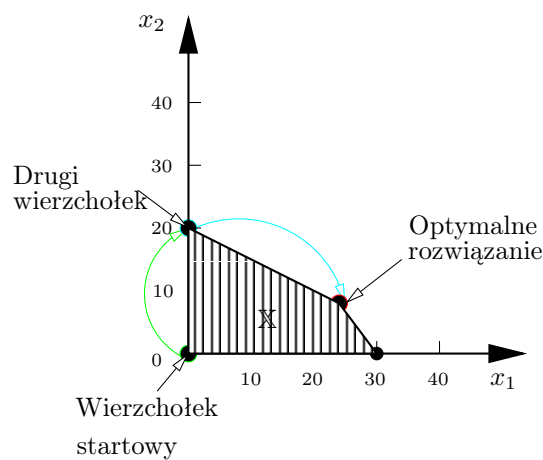
Niech $\hat{\mathbf{x}}^1, \dots, \hat{\mathbf{x}}^k$ będą takie, że $\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$, $j \in [k]$. Weźmy kombinację wypukłą tych wierzchołków $\mathbf{x}' = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j$.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}' = \mathbf{c}^T \left(\sum_{j \in [k]} \lambda_j \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{j \in [k]} \lambda_j \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \sum_{j \in [k]} \lambda_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*.$$

□

Idea algorytmu

Spostrzeżenie 1. Aby znaleźć rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego wystarczy inteligentnie przejrzeć wierzchołki zbioru rozwiązań dopuszczalnych (lub równoważnie rozwiązania bazowe dopuszczalne) i wybrać wierzchołek, w którym wartość funkcji celu jest optymalna.



Uwagi na temat treści wykładu

Treść wykładu w całości została przygotowana na podstawie książek [2, 1].

Literatura

- [1] Ireneusz Nykowski. *Programowanie liniowe*. PWE, Warszawa, 1980.
- [2] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. Dover Publications Inc., 1998.