Obliczenia naukowe
Lista nr 3[1]

zad. 1 Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1] \ldots$ będzie ciągiem przedziałów skonstruowanych za pomocą metody bisekcji zastosowanej do wyznaczenia zera funkcji ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$ oraz niech $c_n = (a_n + b_n)/2$, $\lim_{n\to\infty} c_n = r$ i $e_n = r - c_n$.

(a) Czy relacja $|e_0| \geqslant |e_1| \geqslant \cdots$ jest prawdziwa?

(b) Pokaż, że $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ dla wszystkich $n \geqslant 0$.

zad. 2

(a) (Forsythe i Inni 1977) Obliczyć środek c_n przedziału $[a_n, b_n]$ (w metodzie bisekcji) w systemie zmiennopozycyjnym dziesiętnym z trzycyfrową mantysą z **obcięciem** ($z = \pm m_z 10^c$, $m_z \in [0.1, 1)$) za pomocą wzoru $c_n = (a_n + b_n)/2$ dla $a_n = 0.982$ i $b_n = 0.987$.

(b) Podprzedział w metodzie bisekcji, w którym funkcja zmienia znak można wyznaczyć sprawdzając warunek $f(a_n)f(c_n) < 0$ (nie jest to zalecane).

Rozważmy w arytmetykę `single` zgodną ze standardem `IEEE 754`. Sprawdzić w tej arytmetyce warunek $f(a_n)f(c_n) < 0$ dla $f(a_n) = -10^{-23}$, $f(c_n) = 10^{-23}$ oraz dla $f(a_n) = -10^{19}$, $f(c_n) = 10^{20}$.

Sprawdzić również w języku `Julia`.

zad. 3 Rozważmy metodę bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 3.5]$.

(a) Jaka jest szerokość przedziału w n-tym kroku metody?

(b) Jaka jest możliwa maksymalna odległość między pierwiastkiem r a środkiem tego przedziału w n-tym kroku?

zad. 4 Rozważmy metodę bisekcji zaimplementowaną w arytmetyce `single` (IEEE 754) i z przedziałem początkowym $[128, 129]$.

(a) Czy można obliczyć pierwiastek z błędem bezwzględnym $< 10^{-6}$?

(b) Czy można obliczyć pierwiastek z błędem względnym $< 10^{-6}$?

zad. 5 Czy istnieje przykład dla którego lewe końce przedziałów konstruowanych przez metodę bisekcji są rosnące $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$?

zad. 6 Aby obliczyć odwrotność liczby $R \neq 0$ bez wykonywania dzieleń można zastosować metodę Newtona do rozwiązania równania $x^{-1} - R = 0$. Napisać krótki algorytm wynikający z bezpośredniego zastosowania metody Newtona do funkcji $x^{-1} - R$. Nie stosować ani dzieleń ani potęgowań. Dla $R > 0$ zaproponować wybór przybliżenia początkowego.

Jaki jest rząd zastosowanej metody?

zad. 7 (Stożek 1994) Jaki jest wykładnik zbieżności metody Newtona zastosowanej do rozwiązania następujących równań:

$$x^2 = 0,\ x^3 = 0,\ x + x^3 = 0?$$

[1] Część zadań pochodzi z książki D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.

zad. 8 (Stożek 1994) Do których z pierwiastków $0, \pm 1$ jest zbieżna metoda Newtona zastosowana do równania $x^3 - x = 0$? Czy to zależy od wyboru przybliżenia początkowego? Czy przybliżenie początkowe $x_0 = \pm 1/\sqrt{5}$ jest odpowiednie?

zad. 9

(a) Jaki będzie wykładnik zbieżności metody Newtona zastosowanej do wyznaczenia zer funkcji $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$?

(b) Jaki będzie wykładnik zbieżności metody Newtona zastosowanej do wyznaczenia 2-krotnego zera r funkcji f (tzn. $f(r) = 0$, $f^{'}(r) = 0$).

Wsk. Funkcję f mającą 2-krotne zero r można przedstawić $f(x) = (x - r)^2 g(x)$, $g(r) \neq 0$.

zad. 10 Czy $g(x) = \frac{1}{2}x$ jest odwzorowaniem zwężającym na przedziale $[-1, 1]$? Czy ma punkt stały tym przedziale?

zad. 11 Za pomocą odpowiedniego rysunku sprawdzić, czy równanie $10 - 2x + \sin x = 0$ ma rozwiązanie i zaproponować jakieś przybliżenie początkowe tego rozwiązania. Czy do wyznaczenia rozwiązania równania można zastosować następującą metodę iteracyjna:

$$x_{n+1} := 5 + \frac{1}{2}\sin x_n, \quad x_0 \text{ - dane?}$$

Wsk. Czy odwzorowanie $\Phi(x) = 5 + \frac{1}{2}\sin x$ jest zwężające? Czy punkt stały odwzorowania Φ jest rozwiązaniem powyższego równania?

zad. 12 (Stożek 1994) Zbadać zbieżność metody iteracyjnej $x_{n+1} := \Phi(x_n)$, gdzie

$$\Phi(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

zad. 13 (Stożek 1994) Chcemy rozwiązać równanie $x + \ln x = 0$. Rozważamy następujące metody:

(a) $x_{n+1} := -\ln x_n$,

(b) $x_{n+1} := \mathrm{e}^{-x_n}$, $x_0 > 0$,

(c) $x_{n+1} := \frac{x_n + \mathrm{e}^{-x_n}}{2}$.

Którą z tych metod należy użyć?

zad. 14 Niech $a > 0$ i niech

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

Jest to ciąg kolejnych przybliżeń wyznaczonych metodą Newtona zastosowaną do równania $x^2 - a = 0$. Niech $x_0 > 0$. Sprawdzić, że $x_{n+1} > \sqrt{a}$. Pokazać, że $x_n - x_{n+1} > 0$ dla $n > 0$. Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do $\sqrt{a}$.