

Obliczenia naukowe

Wykład nr 11

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [3] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [4] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [5] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [6] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [7] Kielbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.
- [8] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1975.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książki [5].



Aproksymacja funkcji w przestrzeniach unormowanych

Ogólnie zadanie aproksymacji można sformułować następująco: dla danej funkcji f spośród funkcji ustalonej klasy poszukujemy tej funkcji g , która w określonym sensie najlepiej przybliża f .

Niech f będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$. Dla ustalonego n szukamy wielomianu p co najwyżej n -go stopnia, dla którego

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \rightarrow \min$$

Dla danych N punktów (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq N$) szukamy wielomianu p co najwyżej n -go stopnia, $n \ll N$, dla którego

$$\sum_{i=1}^N (y_i - p(x_i))^2 \rightarrow \min$$



Aproksymacja

Definicja 1

Przestrzeń liniową $\mathbb{X}$ nazywamy unormowaną jeśli określona jest w niej funkcja, zwana normą, $\|\cdot\| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ o własnościach:

- $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$,

dla dowolnych $f, g \in \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Niech dana będzie podprzestrzenią liniowa $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, i $f \in \mathbb{X}$, $g \in \mathbb{Y}$, $\|f - g\|$.

Pytanie Czy dla każdej funkcji $f \in \mathbb{X}$ istnieje funkcja $g_f \in \mathbb{Y}$ o własności

$$\|f - g_f\| = \inf_{g \in \mathbb{Y}} \|f - g\| \quad ?$$

Definicja 2

Funkcja g_f nazywana jest funkcją optymalną dla f względem podprzestrzeni $\mathbb{Y}$.



Aproksymacja

Definicja 3

Jeśli g_f istnieje, to wielkość: $\inf_{g \in \mathbb{Y}} \|f - g\|$ nazywamy błędem aproksymacji.

Zasadnicze zagadnienia aproksymacyjne

Pytanie 1. Czy dla danej funkcji f istnieje funkcja optymalna g_f ?

Pytanie 2. Czy funkcja g_f określona jest jednoznacznie?

Pytanie 3. Jak skonstruować funkcję optymalną?

Pytanie 4. Jaki jest błąd aproksymacji optymalnej? Jak go obliczać?

Pytanie 5. Jak funkcja optymalna g_f i błąd aproksymacji optymalnej zależą od f i jej własności?

Twierdzenie 1

Niech $\mathbb{Y}$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni liniowej unormowanej $\mathbb{X}$. Wówczas dla każdej funkcji $f \in \mathbb{X}$ istnieje funkcja optymalna g_f względem $\mathbb{Y}$.



Aproksymacja

Definicja 4

Przez $\mathbb{X} = L_p^2[a, b]$ oznaczamy przestrzeń funkcji f o całkowalnym w przedziale $[a, b]$ wyrażeniu $p \cdot f^2$, gdzie p jest ustaloną funkcją całkowalną, (funkcją wagową — wagą) nieujemną w przedziale $[a, b]$ znikającą co najwyżej w skończonej liczbie porównań, tj.

$$|\{\zeta \in [a, b] \mid p(\zeta) = 0\}| < \infty$$

$L_p^2[a, b]$ jest przestrzenią liniową unormowaną z normą

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b p(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Definicja 5

Przez $\mathbb{X} = l_{p,N}^2$ oznaczamy przestrzeń, której elementami są układy N liczb rzeczywistych $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ (układy te można interpretować jako $f(x_i) = f_i, i = 1, \dots, N$), a norma definiowana jest następująco

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N p_i f_i^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N p_i f^2(x_i) \right)^{1/2},$$

gdzie $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ jest układem liczb dodatnich.



Aproksymacja

Definicja 6

Aproksymację w przestrzeni $L_p^2[a, b]$ lub $l_{p,N}^2$ z błędem $\|f - g\|_2$ nazywamy aproksymacją średniokwadratową.

Przyjmijmy, że $\mathbb{Y} = \Pi_n$, gdzie Π_n jest przestrzenią wielomianów co najwyżej n -go stopnia.

Stąd zastosowanie twierdzenia 1 gwarantuje istnienie dla każdej funkcji $f \in L_p^2[a, b](l_{p,N}^2)$ wielomianu optymalnego $w_f \in \Pi_n$ takiego, że

$$\|f - w_f\|_2 = \inf_{w \in \Pi_n} \|f - w\|_2 = E_n(f),$$

gdzie w_f nazywamy n -tym wielomianem optymalnym dla funkcji f sensie aproksymacji średniokwadratowej, a $E_n(f)$ nazywamy n -tym błędem optymalnym.



Aproksymacja

Definicja 7

Przestrzeń liniową $\mathbb{X}$ nazywamy przestrzenią unitarną jeśli określona jest w niej funkcja, zwana iloczynem skalarnym, $(\cdot, \cdot) : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ o własnościach:

- $(f, f) \geq 0$, ; $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
- $(f, g) = (g, f) \quad f, g \in \mathbb{X}$,
- $(af_1 + bf_2, g) = a(f_1, g) + b(f_2, g), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{X}$

Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną, jeśli za normę przyjmujemy $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Przykład

Przestrzenie $L_p^2[a, b]$ i $l_{p,N}^2$ są unitarne

$$(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \quad f, g \in L_p^2[a, b]$$

$$(f, g) = \sum_{i=1}^N p_i f(x_i)g(x_i) \quad f, g \in l_{p,N}^2$$



Aproksymacja

W przestrzeni unitarnej zachodzi twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie 2

Jeśli $(f, g) = 0$, to $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Definicja 8

Funkcję $f, g \in \mathbb{X}$ są ortogonalne $\Leftrightarrow (f, g) = 0$.

Funkcję $\{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathbb{X}$, $f_i \neq 0$, tworzą układ ortogonalny $\Leftrightarrow (f_i, f_j) = 0$ dla $i \neq j$

oraz tworzą układ ortonormalny $\Leftrightarrow (f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$



Aproksymacja

Definicja 9

Układ wielomianów $\{P_k\} \subset \mathbb{X} = \begin{cases} L^2_p[a, b] \\ l^2_{p,N} \end{cases}$ nazywamy ciągiem ortogonalnym wielomianów $\Leftrightarrow$

- P_k ($k = 0, 1, \dots$) jest wielomianem stopnia dokładnie k ,
- $(P_k, P_l) = 0$ $k \neq l$ ($k, l = 0, 1, \dots$)
- $(P_k, P_k) > 0$

$\{P_k\}$ jest ortonormalny $\Leftrightarrow \{P_k\}$ jest ortogonalny i $(P_k, P_k) = 1$ ($k = 0, 1, \dots$).

$$(P_k, P_l) = \int_a^b p(x) P_k(x) P_l(x) dx \quad k \neq l \quad (k, l = 0, 1, \dots) \quad \mathbb{X} = L^2_p[a, b]$$

$$(P_k, P_l) = \sum_{i=1}^N p(x_i) P_k(x_i) P_l(x_i) \quad k \neq l \quad (k, l = 0, 1, \dots, n)$$

$$n \leq N - 1, \quad \mathbb{X} = l^2_{p,N}, \quad \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

