

Obliczenia naukowe

Wykład nr 4

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] M. T. Heath, *Scientific Computing, An Introductory Survey*, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [3] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [4] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [6] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [8] Kielbański, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.
- [9] E. Stożek, *Metody numeryczne w zadaniach*, Wyd. Uniw. Łódzkiego, Łódź 1994.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książek [1,9].



Będziemy rozpatrywać metody iteracyjne postaci:

$$x_{n+1} := \Phi(x_n) \quad (n \geq 0),$$

gdzie $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 jest początkowym.

Przykład

W metodzie Newtona, dla zadania $f(x) = 0$, Φ ma następującą postać:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$



Punkt stały

Oczywiście $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ może generować ciągi rozbieżne. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ istnieje i jest skończona, mianowicie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Jeśli Φ jest ciągła, to:

$$\Phi(\alpha) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \alpha.$$

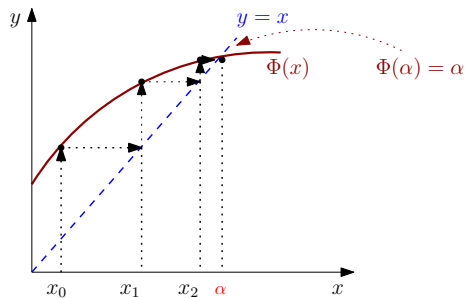
Zatem

$$\Phi(\alpha) = \alpha.$$

Punkt α nazywamy punktem stałym funkcji Φ .



Punkt stały



Przykład

$$\Phi(x) = x - \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = -2x.$$

Zbieżność metod iteracyjnych

Twierdzenie (o kontrakcji)

Niech $D \subset \mathbb{R}$ będzie podzbiorem domkniętym. Jeśli $\Phi : D \rightarrow D$ jest odwzorowaniem zwężającym zbioru D w siebie, to Φ ma *jedyny punkt stały* α . Ponadto α jest granicą każdego ciągu otrzymanego za pomocą $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ z punktu początkowego $x_0 \in D$.



Odwzorowanie zwężające

Przykład

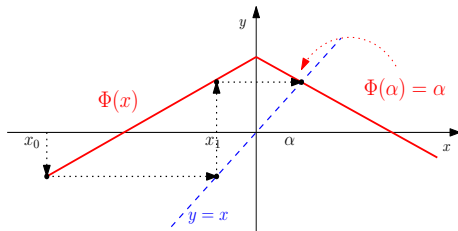
Rozważmy $x_{n+1} := 3 - \frac{1}{2}|x_n|$,

$$\Phi(x) = 3 - \frac{1}{2}|x|.$$

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= |3 - \frac{1}{2}|x| - 3 + \frac{1}{2}|y|| \\ &= \frac{1}{2}||x| - |y|| \leq \frac{1}{2}|x - y|. \end{aligned}$$

Stąd $\lambda = \frac{1}{2}$, D jest dowolnie szeroki i Φ jest odwzorowaniem zwężającym.

$\Phi(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha = 2$ (punkt stały).



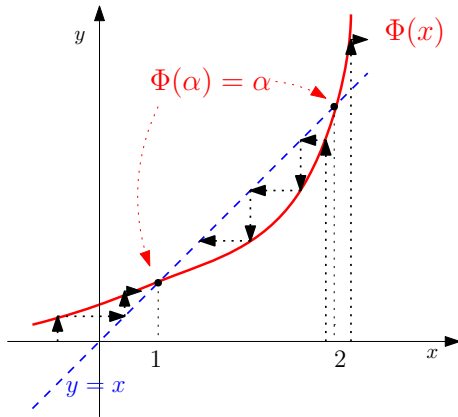
Zbieżność

Przykład

Rozważmy równanie $2x = 2^x$ (pierwiastki $r_1 = 1, r_2 = 2$). Zastosujmy do wyznaczenia pierwiastków $x_{n+1} := 2^{x_n-1}$ ($x = \frac{2^x}{2} = 2^{x-1}$).

$\Phi(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ (punkty stałe).

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_0 \in (-\infty, 1], \\ 1 & \text{jeśli } x_0 \in (1, 2), \\ 2 & \text{jeśli } x_0 = 2, \\ +\infty & \text{jeśli } x_0 \in (2, +\infty). \end{cases}$$



Zbieżność

Twierdzenie

Przypuśćmy, że równanie $x = \Phi(x)$ ma pierwiastek α , tj. $\alpha = \Phi(\alpha)$, α jest punktem stałym. Niech w przedziale $I = \{x : |x - \alpha| \leq \Gamma\}$ istnieje pochodna $\Phi'(x)$ taka, że $|\Phi'(x)| \leq \rho < 1$. Wtedy dla każdego $x_0 \in I$

- (i) $x_n \in I, n \geq 1$,*
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$,*
- (iii) α jest jedynym punktem stałym odwzorowania Φ w I .*

Dowód.

Z twierdzenia o wartości średniej i o kontrakcji

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi_x)| |x - y| \leq \rho |x - y| \text{ dla dowolnych } x, y \in I,$$

gdzie $\rho = \lambda < 1$.

Zbieżność

Przykład

Rozważmy metodę Newtona dla $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ ($r = 0$ jest pierwiastkiem wielokrotnym). Zatem

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^p}{px^{p-1}} = \frac{p-1}{p}x.$$

Oczywiście $|\Phi'(x)| = \frac{p-1}{p} \leq \rho < 1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Stąd $\alpha = 0$ jest jedynym stałym Φ . Ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, punkt początkowy x_0 jest dowolny.



Zbieżność

Przykład (cd...)

Jaki jest wykładnik zbieżności metody $x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n$?

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{p-1}{p}|x_n| = \frac{p-1}{p}|x_n - \alpha| = C|x_n - \alpha|^\gamma,$$

gdzie $C = \frac{p-1}{p} \in (0, 1)$ i wykładnik zbieżności $\gamma = 1$. Stąd metoda jest zbieżna liniowo.

Należy zauważyć, że metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo ($\gamma = 2$) jeśli $f'(r) \neq 0$.



Zbieżność

Przykład

Rozważmy równanie $x + \ln x = 0$. Zastosujemy do metody $x_{n+1} := e^{-x_n}$, $\Phi(x) = e^{-x}$, do wyznaczania jego pierwiastków r .

Sprawdźmy czy rzeczywiście można zastosować tę metodę, tj. czy jednym z punktów stałych jest r

$$\Phi(\alpha) = \alpha, \quad e^{-\alpha} = \alpha, \quad -\alpha = \ln \alpha, \quad \alpha + \ln \alpha = 0.$$

Zatem punkty stałe Φ pokrywają się z pierwiastkami równania.

Sprawdźmy warunek dostateczny zbieżności:

$$|\Phi'(x)| = |-e^{-x}| < 1 \text{ dla } x > 0.$$

Zatem dla każdego $x_0 > 0$ metoda zbiega do jedyne go punktu stałego α (pierwiastka r).



Zbieżność

Twierdzenie

Niech p -ta pochodna $\Phi^{(p)}(x)$ funkcji iteracyjnej $\Phi(x)$ będzie ciągłą w pewnym otoczeniu α . Metoda $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ jest zbieżna do α i jest rzędu p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi(\alpha) = \alpha, \quad \Phi^{(j)}(\alpha) = 0 \quad j = 1, \dots, p-1, \quad \Phi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

*Ponadto stała zbieżności $C = \frac{\Phi^{(p)}(\alpha)}{p!}$
(dla $p = 1$, $\Phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$, C musi być takie, że $|C| < 1$).*



Zbieżność

Dowód (szkic).

Rozwińmy funkcję $\Phi(x_{n+1} := \Phi(x_n))$ w szereg Taylora wokół punktu α :

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha) + \Phi^{(1)}(\alpha)(x - \alpha) + \cdots + \frac{\Phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x - \alpha)^{p-1} + \frac{\Phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \alpha)^p,$$

gdzie ξ leży między x i α . Połóżmy $x = x_n$. Zatem

$$\Phi(x_n) = \Phi(\alpha) + \Phi^{(1)}(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots + \frac{\Phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\Phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n - \alpha)^p.$$

($\Leftarrow$) Z założenia ($x_{n+1} := \Phi(x_n)$, $\Phi(\alpha) = \alpha$, $\Phi^{(j)}(\alpha) = 0$, $\Phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$) dostajemy:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \frac{\Phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - \alpha)^p = \frac{\Phi^{(p)}(\xi)}{p!}e_n^p \approx \frac{\Phi^{(p)}(\alpha)}{p!}e_n^p = Ce_n^p.$$

Zbieżność Φ z wniosku z twierdzenia o kontrakcji ($\Phi'(\alpha) < 1$). ($\Rightarrow$) Ze zbieżności i definicji wykładnika zbieżności.

