

Obliczenia naukowe

Wykład nr 5

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Podstawowych Problemów Techniki,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] M. T. Heath, *Scientific Computing, An Introductory Survey*, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [3] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [4] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [6] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [8] Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].



Pierwiastki wielomianów

Dany jest wielomian w postaci naturalnej

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

gdzie współczynniki a_k i zmienna z mogą być liczbami zespolonymi ($a_k, z \in \mathbb{C}$)

Twierdzenie 1 (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Dowolny wielomian stopnia $n \geq 1$ nad ciałem liczb zespolonych ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Jeśli $a_k \in \mathbb{R}$, pierwiastki występują w parach sprzężonych.

Dzieląc wielomian $p(z)$ ($n \geq 1$) przez czynnik liniowy $(z - c)$ otrzymamy

$$p(z) = (z - c)q(z) + R,$$

$q(z)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$, a R jest resztą.

Jeśli $z = c$, to $p(c) = R$.

Jeśli c jest pierwiastkiem wielomianu p , to $R = 0$ i

$$p(z) = (z - c)q(z).$$



Pierwiastki wielomianów

Jeżeli r_1 jest pierwiastkiem p , to p możemy zapisać

$$p(z) = (z - r_1)q_1(z).$$

Zgodnie z Zasadniczym Twierdzeniem q_1 ma pierwiastek r_2 (chyba, że jest wielomianem zerowego stopnia). Możemy więc podzielić q_1 przez czynnik liniowy $z - r_2$ i otrzymamy

$$p(z) = (z - r_1)(z - r_2)q_2(z).$$

W każdym kroku tego procesu zmniejszamy stopień q_k o jeden, aż q_n będzie stałą. Ostatecznie otrzymamy rozkład p

$$p(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)q_n.$$

Zatem p ma n pierwiastków zespolonych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy ile wynosi jego krotność).

Jeśli $a_k \in \mathbb{R}$, pierwiastki występują w parach sprzężonych.



Lokalizacja pierwiastków wielomianów

Twierdzenie 2

Wszystkie zera wielomianu

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ leżą wewnątrz koła
 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0 \leq k < n} |a_k|\}.$

Przykład

Znaleźć koło zawierające wszystkie zera wielomianu

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 5z - 2.$$

Promień koła $\rho = 1 + |a_4|^{-1} \max_{0 \leq k < 4} |a_k| = 8.$

Rozpatrzmy funkcję $s(z) = z^n p(1/z)$. Wtedy

$$\begin{aligned} s(z) &= z^n \left[a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \dots + a_0 \right] \\ &= a_n + a_{n-1} z + a_{n-2} z^2 + \dots + a_0 z^n. \end{aligned}$$

Oczywiście: $p(z_0) = 0 \iff s(1/z_0) = 0$ dla $z_0 \neq 0.$



Lokalizacja pierwiastków wielomianów

Twierdzenie 3

Jeżeli wszystkie zera wielomianu s leżą w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, to wszystkie niezerowe zera wielomianu p leżą na zewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho^{-1}\}$.

Przykład

Znaleźć koło, w którym nie ma zer wielomianu p

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 5z - 2.$$

Wielomian s ma postać

$$s(z) = -2z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 4z + 1$$

Zera s leżą w kole o promieniu

$\rho = 1 + |a_4|^{-1} \max_{0 \leq k < 4} |a_k| = 9/2$. Zera p leżą na zewnątrz koła o promieniu $2/9$. Stąd wszystkie zera wielomianu p leżą w pierścieniu $2/9 < |z| < 8$.



Algorytm Hornera

Założmy, wielomian p jest dany w postaci

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

p możemy zapisać w postaci

$$p(z) = (\dots ((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \cdots)z + a_0.$$

Dla danego z_0 , algorytm Hornera wyznacza $p(z_0)$ oraz wielomian $q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}$ taki, że

$$p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_0)$$

Nieznane współczynniki b_k wielomianu q wyznaczamy z równania

$$\begin{aligned} & a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \\ &= (z - z_0)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}) + p(z_0). \end{aligned}$$



Algorytm Hornera

Otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} + z_0 b_{n-1} &= b_{n-2} \\ &\vdots \\ a_1 + z_0 b_1 &= b_0 \\ a_0 + z_0 b_0 &= p(z_0) \end{aligned}$$

Dane: $n, z_0, a_0, \dots, a_n$

Wyniki: $p(z_0), b_0, \dots, b_{n-1}$

$b_{n-1} \leftarrow a_n;$

for $k \leftarrow n-1$ **downto** 0 **do**

$b_{k-1} \leftarrow a_k + z_0 b_k;$

end for

return $b_{-1}, b_0, \dots, b_{n-1};$

W ręcznych obliczeniach $p(z_0)$ i $q(z)$ użyteczna jest tabela

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
z_0		$z_0 b_{n-1}$	$z_0 b_{n-2}$	$\cdots$	$z_0 b_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{-1}



Algorytm Hornera

Przykład

Oblicz za pomocą algorytmu Hornera wartość wielomianu p w punkcie 3 i wielomian $q(z)$

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 5z - 2.$$

Konstruujemy tabelę do ręcznych obliczeń

	1	-4	7	-5	-2
3		3	-3	12	21
	1	-1	4	7	19

$$p(3) = 19, q(z) = z^3 - z^2 + 4z + 7,$$

$$p(z) = (z - 3)(z^3 - z^2 + 4z + 7) + 19.$$



Zastosowanie metody Newtona

Przedstawimy teraz sposób wykorzystania metody Newtona do obliczania pierwiastków danego wielomianu $p(z)$

$$z_{k+1} = z_k - \frac{p(z_k)}{p'(z_k)}.$$

Jak efektywnie obliczyć $p(z_k)$ i $p'(z_k)$?

Po zróżniczkowaniu równości $p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_0)$ otrzymujemy $p'(z) = q(z) + (z - z_0)q'(z)$.

Następnie dla $z = z_0$ otrzymujemy

$$p'(z_0) = q(z_0).$$

Pochodną $p'(z_0)$ możemy więc obliczyć stosując algorytm Hornera używając współczynników b_k wielomianu $q(z)$.



Zastosowanie metody Newtona

Dane: $n, z_0, a_0, \dots, a_n$

Wyniki: $p(z_0), p'(z_0)$

$\alpha \leftarrow a_n; \beta \leftarrow 0;$

for $k \leftarrow n - 1$ **downto** 0 **do**

$\beta \leftarrow \alpha + z_0 \beta; \{\text{obliczanie } p'(z_0)\}$

$\alpha \leftarrow a_k + z_0 \alpha; \{\text{obliczanie } p(z_0)\}$

end for

return $\alpha, \beta;$

Dane: $n, z_0, a_0, \dots, a_n, M, \epsilon$

Wyniki: $p(r), p'(r), r$

for $k \leftarrow 1$ **to** M **do**

$[\alpha, \beta] \leftarrow \text{HORNER}(n, z_0, a_0, \dots, a_n); \{\text{obliczanie } p(z_0), p'(z_0)\}$

$z_1 \leftarrow z_0 - \alpha / \beta; \{\text{metoda Newtona}\}$

if $|z_1 - z_0| < \epsilon$ **then**

return $\alpha, \beta, z_1;$

end if

end for



Zastosowanie metody Newtona

Twierdzenie 4

Niech x_k i x_{k+1} będą kolejnymi przybliżeniami skonstruowanymi przez metodę Newtona zastosowaną do wielomianu p stopnia n . Wtedy istnieje zero wielomianu p oddalone od x_k w płaszczyźnie zespolonej o co najwyżej $n|x_k - x_{k+1}|$.

Uwaga Aby wyznaczyć pierwiastki zespolone wielomianu $p(z)$ za pomocą metody Newtona, musimy zaprogramować metodę Newtona w arytmetyce zespolonej.



Deflacja czynnikiem liniowym

Po wyznaczeniu pierwiastka r_1 wielomianu p musimy wyznaczyć pozostałe pierwiastki $r_2, \dots, r_n$. „Oddzielamy” więc obliczony pierwiastek r_1 , tzn. wyznaczamy wielomian $q(z)$ stopnia $n - 1$

$$p(z) = (z - r_1)q(z).$$

Proces ten nazywamy *deflacją*.

Przykład

Niech $r_1 = 1$ będzie obliczonym pierwiastkiem wielomianu $p(z) = z^3 + z^2 - z - 1$. Wykonać deflację czynnikiem $(z - 1)$, tzn. wyznaczyć wielomian $q(z)$ stopnia 2. Aby wyznaczyć q stosujemy algorytm Hornera. Konstruujemy tabelę do ręcznych obliczeń

$$\begin{array}{r} \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$p(1) = 0, q(z) = z^2 + 2z + 1,$$

$$p(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 1).$$



Deflacja czynnikiem liniowym

Po znalezieniu pierwiastka r_1 wielomianu $p(z)$, np. metodą Newtona, stosujemy deflację czynnikiem $(z - r_1)$. Następnie wyznaczmy pierwiastek r_2 , np. metodą Newtona, zredukowanego wielomianu $q_1(z)$ i ponownie wykonujemy deflację czynnikiem $(z - r_2)$. Proces kontynuujemy aż wyznaczmy wszystkie pierwiastki.

Uwagi o deflacji:

- pierwiastki powinny być obliczane w kolejności wzrastających modułów,
- pierwiastki obliczamy z maksymalną graniczną dokładnością,
- każdy obliczony pierwiastek $\tilde{r}$ zredukowanego wielomianu $q(z)$ poprawiamy przez zastosowanie metody (np. Newtona) do wielomianu $p(z)$ z punktem startowym $\tilde{r}$. Dopiero po tym kroku stosujemy deflację.

