

Obliczenia naukowe

Wykład nr 6

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] M. T. Heath, *Scientific Computing, An Introductory Survey*, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [3] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [4] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [6] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [8] Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].



Interpolacja za pomocą wielomianów

Rozpatrzmy następujący problem. Mamy dane $n + 1$ punktów (x_i, y_i) :

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Węzły $x_i, i = 0, \dots, n$, są parami różne
Trzeba znaleźć wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że

$$p(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n).$$



Interpolacja za pomocą wielomianów

Gdybyśmy chcieli otrzymać wielomian interpolacyjny w postaci

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

spełniający

$$p(x_i) = y_i \text{ dla } 0 \leq i \leq n.$$

Wówczas musimy wyznaczyć $n + 1$ współczynników

$a_0, a_1, \dots, a_n$. Co prowadzi do układu równań z macierzą **Vandermonde'a**, źle uwarunkowaną,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



Interpolacja za pomocą wielomianów

Twierdzenie 1

Dla węzłów x_i i liczb y_i istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ spełniający warunki interpolacji

$$p(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n).$$



Interpolacja za pomocą wielomianów

Dowód

Wprowadźmy wielomian l_i stopnia n

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad l_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = x_j, \\ 1 & \text{dla } x = x_i. \end{cases}$$

Otrzymujemy wielomian $L_n \in \Pi_n$ spełniający warunki interpolacji

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad L_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_j) = y_j.$$

(Jednoznaczność) Załóżmy, że istnieją dwa wielomiany $L_1, L_2 \in \Pi_n$. Spełniające warunki interpolacji. Zatem

$$(L_1 - L_2)(x_j) = 0 \quad (0 \leq j \leq n).$$

$(L_1 - L_2) \in \Pi_n$ i $n + 1$ miejsc zerowych (sprzeczność). Stąd $L_1 \equiv L_2$.



Postać Lagrange'a wzoru interpolacyjnego

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



Interpolacja za pomocą wielomianów...

Twierdzenie 2 (Błąd interpolacji wielomianowej)

Niech $f \in C^{n+1}[a, b]$ i niech $p \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolacyjnym na węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. To istnieje $\zeta_x \in (a, b)$ (zależna od x) takie, że

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Przykład

Jaki jest błąd interpolacji funkcji $f(x) = \sin x$ za pomocą wielomianu stopnia 9 w przedziale $[0, 1]$.

Korzystamy z Twierdzenia 2. Szacujemy $|f^{(10)}(\zeta_x)| \leq 1$, $\prod_{i=0}^9 |(x - x_i)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$.

$$|\sin x - p(x)| = \frac{|f^{(10)}(\zeta_x)|}{10!} \prod_{i=0}^9 |(x - x_i)| \leq \frac{1}{10!} < 2.8 \cdot 10^{-7}.$$



Dowód Twierdzenia 2

Jeżeli x jest węzłem interpolacyjnym x_i , to obie strony równania się zerują (w twierdzeniu).

Ustalmy x taki, że $x \neq x_i$ i zdefiniujmy funkcję ϕ

$$w(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i), \quad \phi \equiv f - p - \lambda w.$$

λ jest liczbą rzeczywistą dobraną tak, aby $\phi(x) = 0$. Stąd

$$\lambda = (f(x) - p(x))/w(x).$$

$\phi \in C^{n+1}[a, b]$ i ϕ zeruje się w $n + 2$ punktach $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Z twierdzenia Rolle'a pochodna ϕ' ma co najmniej $n + 1$ miejsc zerowych. Podobnie ϕ'' ma co najmniej n miejsc zerowych. Stosując dalej twierdzenie Rolle'a.

Dostajemy, że $\phi^{(n+1)}$ ma co najmniej jedno zero, powiedzmy $\zeta_x \in (a, b)$.

$$\phi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - p^{(n+1)} - \lambda w^{(n+1)} = f^{(n+1)} - (n + 1)! \lambda.$$

Stąd

$$0 = \phi^{(n+1)}(\zeta_x) = f^{(n+1)}(\zeta_x) - (n + 1)! \lambda = f^{(n+1)}(\zeta_x) - (n + 1)! \frac{f(x) - p(x)}{w(x)}.$$

Ostatecznie

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad \square$$



Ilorazy różnicowe

Z Twierdzenia 1 wiemy, że dla różnych węzłów $x_0, x_1, \dots, x_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ interpolujący f taki, że

$$p(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

Wielomian p można przedstawić jako kombinację liniową wielomianów $1, x, x^2, \dots, x^n$ (baza Π_n). Jednak takie przedstawienie nie jest zalecane, ponieważ prowadzi do układu z macierzą Vandermonde'a (zadanie źle uwarunkowane).

Przedstawimy p w innej bazie Π_n

$$q_0(x) = 1$$

$$q_1(x) = (x - x_0)$$

$$q_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\vdots$$

$$q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$



Ilorazy różnicowe

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j q_j(x).$$

Z faktu, że p spełnia warunki interpolacji, otrzymujemy układ równań z którego wyznaczamy $c_0, c_1, \dots, c_n$

$$\sum_{j=0}^n c_j q_j(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & q_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_1(x_n) & q_2(x_n) & \cdots & q_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$



Ilorazy różnicowe

Rozwiązując układ z góry w dół wyznaczamy $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Możemy zauważyć, że c_0 zależy od $f(x_0)$, c_1 zależy od $f(x_0)$ i $f(x_1)$ itd. c_n zależy od f w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Wprowadzimy notację $c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest współczynnikiem przy q_n . Ponieważ

$$q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = x^n + \cdots$$

więc $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest współczynnikiem przy x^n wielomianu stopnia co najwyżej n interpolującego f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$. Wielkość $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ będziemy nazywali *ilorazem różnicowym* opartym na węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$.



Ilorazy różnicowe

Np. $f[x_0]$ jest współczynnikiem przy x^0 wielomianu stopnia 0 interpolującego f w x_0 .

$$f[x_0] = f(x_0).$$

$f[x_0, x_1]$ jest współczynnikiem przy x^1 wielomianu stopnia ≤ 1 interpolującego f w x_0, x_1 .

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

Ogólnie c_i wyznaczamy z wcześniejszego układu równań $c_0 = f[x_0]$, $c_1 = f[x_0, x_1]$ aż do $c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Otrzymujemy *postać Newtona wzoru interpolacyjnego*

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$



Ilorazy różnicowe

Oczywiście:

$$f[x_i] = f(x_i), \text{ dla } 0 \leq i \leq n.$$

Twierdzenie 3 (Ilorazy różnicowe wyższych rzędów)

Ilorazy różnicowe spełniają równość:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$



Dowód Twierdzenia 3

Niech będzie wielomianem $p_k \in \Pi_k$ interpolującym f w węzłach $x_0, \dots, x_k$. Potrzebujemy wielomianów p_n and p_{n-1} . Niech będzie wielomianem $q \in \Pi_{n-1}$ interpolującym f w węzłach $x_1, \dots, x_n$. Wtedy

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(q(x) - p_{n-1}(x))$$

Po obu stronach równości są wielomiany stopnia $\leq n$. Wartości tych wielomianów w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ są takie same, co implikuje wielomiany muszą być identyczne. Muszą mieć więc, po obu stronach, identyczne współczynniki przy x^n i te współczynniki są równe. Współczynnik wielomianu stopnia $\leq n$ interpolującego f w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ jest równy $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Stąd dostajemy

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$



Ilorazy różnicowe

Jeżeli dana jest tablica wartości funkcji $(x_i, f(x_i))$, wówczas ilorazy różnicowe łatwo obliczamy konstruując tablicę trójkątną. Ilorazy różnicowe rzędów 0, 1, 2, 3 obliczamy

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & f[x_0] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_1 & f[x_1] & \nearrow & f[x_1, x_2] & \nearrow & f[x_1, x_2, x_3] & \nearrow & \\ x_2 & f[x_2] & \nearrow & f[x_2, x_3] & \nearrow & & & \\ x_4 & f[x_3] & \nearrow & & & & & \end{array}$$



Ilorazy różnicowe

Przykład

Skonstruować tablicę ilorazów różnicowych dla wartości z tabeli

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

Korzystając z Twierdzenia 3 konstruujemy tablicę ilorazów różnicowych

3	1	2	-3/8	7/40
1	-3	5/4	3/20	
5	2	2		
6	4			



Ilorazy różnicowe

Twierdzenie 4

Ilorazy różnicowe nie zależą od kolejności węzłów. Jeśli $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ jest permutacją $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, to

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Dowód

Iloraz różnicowy $f[z_0, z_1, \dots, z_n]$ jest równy współczynnikowi przy x^n wielomianu stopnia $\leq n$ interpolującego f w węzłach $z_0, z_1, \dots, z_n$. Podobnie iloraz różnicowy $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest równy współczynnikowi przy x^n wielomianu stopnia $\leq n$ interpolującego f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$. Wielomiany oczywiście są równe więc współczynniki są równe. □



Ilorazy różnicowe

Twierdzenie 5

Niech będzie wielomianem $p \in \Pi_n$ interpolującym f różnych węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$. Jeżeli $t \neq x_i$, wtedy

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j).$$



Dowód Twierdzenia 5

Niech będzie wielomianem $q \in \Pi_{n+1}$ interpolującym f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n, t$. Wielomian q możemy otrzymać z p przez dodanie jednego czynnika (postać Newtona)

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Ponieważ $q(t) = f(t)$ dla $x = t$. Zatem

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j) \quad \square$$



Ilorazy różnicowe

Twierdzenie 6

Jeżeli $f \in C^{n+1}[a, b]$ i węzły $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Wtedy istnieje $\zeta \in (a, b)$ taka, że

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$



Dowód Twierdzenia 6

Niech będzie wielomianem $p \in \Pi_{n-1}$ interpolującym f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Z Twierdzenia 2 wynika, że istnieje $\zeta \in (a, b)$ takie, że

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \text{ dla } x = x_n.$$

Z Twierdzenia 5 otrzymujemy

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \text{ dla } t = x_n.$$

Porównując te dwa równania dostajemy

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta) \quad \square$$

