

Obliczenia naukowe

Wykład nr 7 cd...

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Postać $s(x)$ dla $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in [n]$

$s|_{[x_{k-1}, x_k]} \equiv p_k \in \Pi_3$, $k \in [n]$, zatem

$s''|_{[x_{k-1}, x_k]} \equiv p_k \in \Pi_1$, $k \in [n]$, s jest kawałkami liniowa na $[x_0, x_n]$.

Zakładając, że dane są: $s''(x_{k-1}) = M_{k-1}$ i $s''(x_k) = M_k$

wyznaczamy $s''|_{[x_{k-1}, x_k]}$ ze wzoru Lagrange'a

$$s''(x) = M_{k-1} \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + M_k \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = M_{k-1} \frac{x_k - x}{h_k} + M_k \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$$

gdzie $h_k = x_k - x_{k-1}$.

Dwukrotnie całkujemy

$$s'(x) = M_{k-1} \frac{(x_k - x)^2}{-2h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_k} + A$$

$$s(x) = M_{k-1} \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} + A(x - x_{k-1}) + B.$$

Musimy wyznaczyć stałe całkowania A i B .



Postać $s(x)$ dla $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in [n]$

Stałe A i B wyznaczamy z warunków interpolacji:

$s(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $s(x_k) = y_k$, (dwa równania dwie niewiadome)

$$s(x_{k-1}) = M_{k-1} \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6h_k} + B = y_{k-1}$$

$$s(x_k) = M_k \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{6h_k} + A(x_k - x_{k-1}) + B = y_k.$$

Zatem

$$B = y_{k-1} - M_{k-1} \frac{h_k^2}{6}, \quad A = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + M_{k-1} \frac{h_k}{6} - M_k \frac{h_k}{6}.$$

Wstawiamy wyznaczone A i B do

$$s(x) = M_{k-1} \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} + A(x - x_{k-1}) + B.$$



Postać $s(x)$ dla $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in [n]$

Porządkując otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(x) = & \frac{1}{h_k} \left(\frac{1}{6} M_{k-1} (x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 + \right. \\ & (y_{k-1} - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2)(x_k - x) + \\ & \left. (y_k - \frac{1}{6} M_k h_k^2)(x - x_{k-1}) \right) \quad x_k \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$

Do tej pory zakładaliśmy, że momenty $M_1, \dots, M_{n-1}$, czyli $s''(x_k) = M_k$, $k \in [k-1]$ są znane.

Wiemy, że naturalna funkcja sklejana 3-go stopnia spełniająca dodatkowe warunki

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0.$$

Zatem $M_0 = M_n = 0$.



Wyznaczanie momentów $M_1, \dots, M_{n-1}$

Postać $s'(x)$ dla $x \in [x_{k-1}, x_k]$ jest następująca

$$s'(x-0) = M_{k-1} \frac{(x_k - x)^2}{-2h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_k} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + M_{k-1} \frac{h_k}{6} - M_k \frac{h_k}{6}.$$

Postać $s'(x)$ dla $x \in [x_k, x_{k+1}]$ jest następująca

$$s'(x+0) = M_k \frac{(x_{k+1} - x)^2}{-2h_{k+1}} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)^2}{2h_{k+1}} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + M_k \frac{h_{k+1}}{6} - M_{k+1} \frac{h_{k+1}}{6}.$$

$s'(x-0)$ i $s'(x+0)$ dla x_k

$$s'(x_k - 0) = M_k \frac{h_k}{3} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + M_{k-1} \frac{h_k}{6}$$

$$s'(x_k + 0) = -M_k \frac{h_{k+1}}{3} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - M_{k+1} \frac{h_{k+1}}{6}.$$

Wymuszamy ciągłość s'

$$s'(x_k - 0) = s'(x_k + 0), \quad k \in [n-1].$$



$$s'(x_k - 0) = s'(x_k + 0), \quad k \in [n - 1].$$

$$\begin{aligned} \frac{h_k}{6} M_{k-1} + \frac{1}{3} (h_{k+1} + h_k) M_k + \frac{h_{k+1}}{6} M_{k+1} &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \\ h_k M_{k-1} + 2(h_{k+1} + h_k) M_k + (h_{k+1} + h_k - h_k) M_{k+1} &= 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right) \\ \frac{h_k}{h_{k+1} + h_k} M_{k-1} + 2 M_k + \left(1 - \frac{h_k}{h_{k+1} + h_k} \right) M_{k+1} &= \frac{6}{h_{k+1} + h_k} \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right) \end{aligned}$$

Oznaczając $\frac{h_k}{h_{k+1}+h_k}$ przez λ_k i $\frac{6}{h_{k+1}+h_k} \left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_k} \right)$ przez d_k (widać, że $d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$) dostajemy układ $n-1$ równań



Wyznaczanie momentów $M_1, \dots, M_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 - \lambda_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & 1 - \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & 1 - \lambda_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

z którego wyznaczamy momenty $M_1, \dots, M_{n-1}$.

