

Obliczenia naukowe

Wykład nr 7

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] M. T. Heath, *Scientific Computing, An Introductory Survey*, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [3] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [4] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [6] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [8] Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].



Postać Newtona wzoru interpolacyjnego

Postać Newtona wzoru interpolacyjnego jest następująca

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Współczynniki $c_0 = f[x_0]$, $c_1 = f[x_0, x_1]$, ..., $c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, wyznaczamy konstruując tablicę trójkątną ilorazów różnicowych.

Konstrukcja wielomianu interpolacyjnego $p_{n+1}(x)$

$$p_n(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$p_{n+1}(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n+1)$$

Wielomian $p_{n+1}(x)$ można przedstawić w postaci

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1}(x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

Zatem wyznaczenie $p_{n+1}(x)$ na podstawie $p_n(x)$ wymaga wyznaczenia $c_{n+1} = f[x_0, \dots, x_{n+1}]$ (lokalna modyfikacja).



Wielomiany Czebyszewa

Zgodnie z twierdzeniem „o błędzie interpolacji” wielkość błędu zależy od dwóch czynników $f^{n+1}(\zeta_x)$ i $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Na pierwszy z nich raczej nie mamy wpływu. Drugi natomiast zależy od wyboru węzłów interpolacji. Zajmiemy się wyborem węzłów, aby

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \rightarrow \min,$$

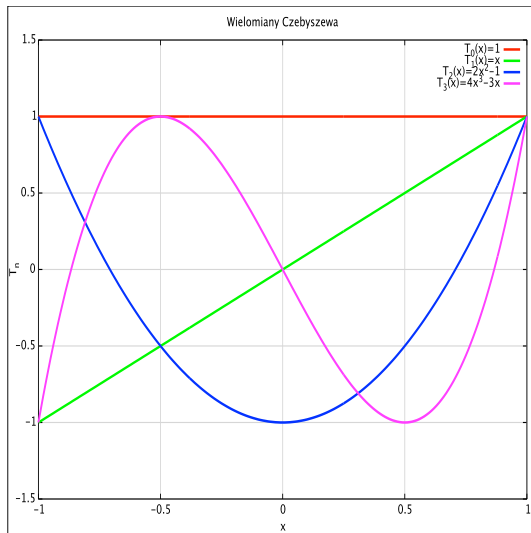
gdzie $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = x^{n+1} + \dots$ a $\|\cdot\|_{[a,b]}$ jest normą w przestrzeni funkcji ciągłych na $[a, b]$.

Proces optymalizacji prowadzi do *wielomianów Czebyszewa* (I-szego rodzaju), które można zdefiniować rekurencyjnie

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 & T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) & (n \geq 1) \end{cases}$$



Wielomiany Czebyszewa



Wielomiany Czebyszewa

Twierdzenie 1

Dla $x \in [-1, 1]$, wielomiany Czebyszewa można przedstawić w postaci

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n \geq 0).$$



Dowód Twierdzenia 1

Ze wzoru $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ dostajemy

$$\cos(n+1)\theta = \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos \theta \cos n\theta + \sin \theta \sin n\theta$$

Dodając powyższe równości otrzymujemy

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

Podstawiając $\theta = \arccos x$, $x = \cos \theta$, i definiując funkcję $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ łatwo zauważyć (zob. równość powyżej), że f_n spełnia zależność rekurencyjną

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 & f_1(x) = x \\ f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x) & (n \geq 1) \end{cases}$$

Zatem $f_n = T_n$.



Z Twierdzenia 1 wynikają następujące własności wielomianów Czebyszewa.

Wielomian T_n , $n = 1, 2, \dots$, ma zera r_j jednokrotne rzeczywiste, leżące w przedziale $(-1, 1)$ i równe

$$r_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n} \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

T_n ma również $n+1$ punktów ekstremalnych y_j w przedziale $[-1, 1]$

$$y_j = \cos \frac{j\pi}{n} \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad T_n(y_j) = (-1)^j.$$



Wielomiany Czebyszewa

Łatwo sprawdzić, że współczynnik a_n przy najwyższej potędze w $T_n(x) = a_n x^n + \dots$ jest równy 2^{n-1} . Zdefiniujemy wielomian

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

gdzie x_i są zerami wielomianu Czebyszewa $T_n(x)$.

Twierdzenie 2

Spośród wszystkich wielomianów stopnia n o współczynniku przy najwyższej potędze równym 1, $w_n(x) = x^n + \dots$, wielomian $\tilde{T}_n$ ma najmniejszą normę

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \|\tilde{T}_n\|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |w_n(x)| = \|w_n\|_{[-1,1]}.$$



Wielomiany Czebyszewa

Rozpatrzmy problem interpolacji w przedziale $[-1, 1]$.

Oczywiście węzły x_i należą do $[-1, 1]$. Jeżeli $x \in [-1, 1]$ to (zob. twierdzenie “O błędzie interpolacji”)

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [-1, 1]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

Z twierdzenia 2 wiemy, że $\max_{x \in [-1, 1]} |\prod_{i=0}^n (x - x_i)| \geq 2^{-n}$ oraz że wartość minimalna jest osiągnięta dla wielomianu

$\tilde{T}_{n+1}(x) = T_{n+1}(x)/2^n$. Otrzymujemy więc twierdzenie o optymalnym doborze węzłów interpolacji.

Twierdzenie 3

Jeżeli w przedziale $[-1, 1]$ za węzły interpolacji x_i przyjmujemy zera wielomianu Czebyszewa T_{n+1} , wówczas

$$\|f - p\|_{[-1, 1]} = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(t)|.$$



Funkcje sklepane

Zadanie interpolacji za pomocą funkcji sklepanych 3-go stopnia możemy sformułować następująco.

Dla danych $n + 1$ punktów (x_i, y_i) ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) znaleźć funkcję s spełniającą warunki:

1. $s \in C^2[x_0, x_n]$,
2. $s|_{[x_{k-1}, x_k]} \equiv p_k \in \Pi_3$ ($1 \leq k \leq n$),
3. $s(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$).

Jeżeli funkcja s spełnia

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0,$$

to s jest **naturalną funkcją sklepaną 3-go stopnia**.



Funkcje sklepane

Twierdzenie 4

Dla dowolnych n , $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $y_0, y_1, \dots, y_n$ istnieje dokładnie jedna funkcja sklejana 3-go stopnia spełniająca dodatkowe warunki $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

Wartości $M_k = s''(x_k)$ ($0 \leq k \leq n$), $M_0 = M_n = 0$ spełniają układ $n - 1$ równań liniowych

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

gdzie $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$, $h_k = x_k - x_{k-1}$.

Ponadto

$$\begin{aligned} s(x) = p_k(x) = & \frac{1}{h_k} \left(\frac{1}{6} M_{k-1} (x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 + \right. \\ & (y_{k-1} - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2)(x_k - x) + \\ & \left. (y_k - \frac{1}{6} M_k h_k^2)(x - x_{k-1}) \right) \quad x_k \in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$



Wyznaczanie funkcji sklepanej 3-go stopnia

krok 1. Obliczyć ilorazy różnicowe $d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ dla $k = 1, \dots, n-1$, gdzie

$$f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]}{x_{k+1} - x_{k-1}}.$$

krok 2. Obliczyć $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$ dla $k = 1, \dots, n-1$.

krok 3. Wyznaczyć M_k dla $k = 1, \dots, n-1$ rozwiązując układ (metodą przegnania, którą omówimy później)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 - \lambda_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & 1 - \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & 1 - \lambda_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

Macierz powyższego układu jest diagonalnie silnie dominująca ($2 > |\lambda_k| + |1 - \lambda_k|$). Stąd jest nieosobliwa.

