

Obliczenia naukowe

Wykład nr 8 cd...

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Rozkład Cholesky'ego

Dana jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetryczna ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) i dodatnio określona.

Macierz symetryczną nazywamy dodatnio określoną, jeśli dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ spełniona jest nierówność

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0.$$

Twierdzenie

Jeśli macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczną i dodatnio określoną, to ma jeden rozkład na czynniki

$$\mathbf{A} = \widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{L}}^T,$$

gdzie $\widehat{\mathbf{L}}$ jest macierzą trójkątną dolną o elementach dodatnich na głównej przekątnej.



Rozkład Cholesky'ego - algorytm

$$\begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & & & & \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & & & \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \hat{l}_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \hat{l}_{n1} & \hat{l}_{n2} & \cdots & \hat{l}_{n,n-1} & \hat{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{21} & \hat{l}_{31} & \cdots & \hat{l}_{n1} \\ & \hat{l}_{22} & \hat{l}_{32} & \cdots & \hat{l}_{n2} \\ & & \hat{l}_{33} & \cdots & \hat{l}_{n3} \\ & & & \ddots & \hat{l}_{n,n-1} \\ & & & & \hat{l}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & & & \ddots & a_{n,n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\hat{l}_{11}^2 = a_{11}$$

$$\hat{l}_{i1} \hat{l}_{11} = a_{i1}$$

$i = 2, \dots, n$ 1-sza kolumna

$$\hat{l}_{21}^2 + \hat{l}_{22}^2 = a_{22}$$

$$\hat{l}_{i1} \hat{l}_{21} + \hat{l}_{i2} \hat{l}_{22} = a_{i2}$$

$i = 3, \dots, n$ 2-ga kolumna

$$\hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jj}^2 = a_{jj}$$

$$\hat{l}_{i1} \hat{l}_{j1} + \hat{l}_{i2} \hat{l}_{j2} + \cdots + \hat{l}_{ij} \hat{l}_{jj} = a_{ij}$$

$i = j + 1, \dots, n$ j-ta kolumna



Rozkład Cholesky'ego - algorytm

```

for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $\hat{l}_{jj} \leftarrow \sqrt{(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \hat{l}_{jk}^2)}$ 
    for  $i \leftarrow j + 1$  to  $n$  do
         $\hat{l}_{ij} \leftarrow (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \hat{l}_{ik} \hat{l}_{jk}) / \hat{l}_{jj}$ 
    end for
end for
    
```

W komputerowej realizacji rozkład $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T$ pamiętamy następująco

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & & & \ddots \\ \hat{l}_{n1} & \hat{l}_{n2} & \cdots & \hat{l}_{n,n} \end{bmatrix}$$

plus tablica $[\mathbf{a}_{11}, \dots, \mathbf{a}_{nn}]$ z przekątną główną macierzy $\mathbf{A}$.

Znając rozkład $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T$ zadanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sprowadzamy do rozwiązania dwóch układów trójkątnych

$$\hat{\mathbf{L}}\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ i } \hat{\mathbf{L}}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$



Rozkład Cholesky'ego - $\mathbf{A}^{-1}$ i $\det(\mathbf{A})$

Znając rozkład $\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^T$ macierzy $\mathbf{A}$ wyznaczamy n kolumn macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ co jest równoważne rozwiązaniu $2n$ układów trójkątnych

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^T \mathbf{x}^{(i)} &= \mathbf{e}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \\ \widehat{\mathbf{L}}\mathbf{y}^{(i)} &= \mathbf{e}^{(i)}, \quad \widehat{\mathbf{L}}^T \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{y}^{(i)} \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

$\det(\mathbf{A})$ wyznaczamy następująco

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^T) = \det(\widehat{\mathbf{L}})\det(\widehat{\mathbf{L}}) = \prod_{i=1}^n \hat{l}_{ii}^2.$$



Związek rozkładu Cholesky'ego z rozkładem LU

Założmy, że znamy rozkład Cholesky'ego $\widehat{LL}^T$ macierzy A .
Zatem

$$A = \widehat{LL}^T = \textcolor{red}{L} \textcolor{red}{D}^{1/2} \textcolor{blue}{D}^{1/2} \textcolor{blue}{L}^T,$$

gdzie $\widehat{L} = \textcolor{blue}{L} \textcolor{red}{D}^{1/2}$, $\textcolor{blue}{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$, $\textcolor{red}{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$\textcolor{red}{D} = \text{diag}(d_{ii})$ i $\textcolor{red}{D}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{d_{ii}})$.

Czyli

$$A = \widehat{LL}^T = \textcolor{blue}{L} \textcolor{red}{D}^{1/2} \textcolor{red}{D}^{1/2} \textcolor{blue}{L}^T = \textcolor{red}{L} \textcolor{blue}{D} \textcolor{blue}{L}^T = \textcolor{red}{L} \textcolor{blue}{U},$$

gdzie $\textcolor{blue}{U} = \textcolor{blue}{D} \textcolor{blue}{L}^T$.

Wyznacznik rozkładu Cholesky'ego jest o połowę tańsze od rozkładu LU .

