

Obliczenia naukowe

Wykład nr 9

Paweł Zieliński

Katedra Podstaw Informatyki,
Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
Politechnika Wrocławska



Literatura

Literatura podstawowa

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005.
- [2] M. T. Heath, *Scientific Computing, An Introductory Survey*, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [3] A. Bjorck, G. Dahlquist, *Metody numeryczne*, PWN, 1987.
- [4] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT 1998.
- [6] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1988.
- [7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

Literatura uzupełniająca

- [8] Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1993.

Znaczna część wykładu została przygotowana na podstawie książki [1].



Metody iteracyjne

Przykład

Rozważmy układ liniowy $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7}x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9}x_1^{(k-1)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7}x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9}x_1^{(k)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.00000	0.00000
10	0.14865	-0.19820
30	0.19662	-0.26615
50	0.19978	-0.26637

Metoda Jacobiego

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.00000	0.00000
10	0.21978	-0.24909
30	0.20009	-0.26659
50	0.20000	-0.26667

Metoda Gaussa-Seidela



Metoda iteracji prostej

Jedną z najprostrzych metod iteracyjnych jest metoda iteracji prostej. Polega ona na przejściu od układu równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

do równoważnego układu (mającego te same rozwiązania)

$$\mathbf{Qx} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Znając powyższe równanie wyznaczamy ciąg przybliżeń rozwiązania $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ze wzoru

$$\mathbf{Qx}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \quad (k \geq 1),$$

gdzie $\mathbf{x}^{(0)}$ jest danym przybliżeniem początkowym.



Metoda iteracji prostej

Macierz $\mathbf{Q}$ powinna być tak wybrana, aby:

- koszt wyznaczania ciągu $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ był niewielki,
- ciąg $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ był szybko zbieżny do rozwiązania.

Powyższe warunki są spełnione jeżeli można łatwo rozwiązać układ $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}$ i jeżeli $\mathbf{Q}^{-1}$ aproksymuje $\mathbf{A}^{-1}$.

Zbadajmy warunki zbieżności ciągu $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ do rozwiązania.

Zakładamy nieosobliwość macierzy $\mathbf{A}$ oraz macierzy $\mathbf{Q}$. Zatem

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}.$$

Poniższy układ jest równoważny układowi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}.$$

Odejmując stronami równania otrzymujemy

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x})$$



Metoda iteracji prostej

Przechodząc do norm, wybieramy dowolną normę macierzową zgodną z jakąkolwiek normą wektorową, tj spełniającą nierówność $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, otrzymujemy oszacowania

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|I - Q^{-1}A\| \|x^{(k-1)} - x\|$$

Ostatecznie dostajemy

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|I - Q^{-1}A\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

Zatem jeżeli $\|I - Q^{-1}A\| < 1$, wówczas wnioskujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.$$



Metoda iteracji prostej

Twierdzenie 1

Dla zbieżności ciągu $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, zdefiniowanego wzorem $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$, do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego $\mathbf{x}^{(0)}$ wystarcza, aby $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$ dla dowolnej normy macierzy zgodnej z jakąkolwiek normą wektorową.

Warunek $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$ jest łatwy do sprawdzenia dla norm $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$. Na ogół trudniej jest spełnić warunek konieczny i dostateczny zbieżności iteracji prostej.

Rozważmy dowolny liniowy proces iteracyjny zdefiniowany przez zależność

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c},$$

gdzie $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Zauważ, że $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ i $\mathbf{c} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$.



Liniowy proces iteracyjny

Twierdzenie 2

Zależność $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ określa ciąg $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ zbieżny do $(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{c}$ dla dowolnego przybliżenia początkowego $\mathbf{x}^{(0)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(\mathbf{G}) < 1$,
gdzie $\rho(\mathbf{G}) = \max_{\lambda \in \text{Spect}(\mathbf{G})} |\lambda|$ nazywamy promieniem spektralnym macierzy $\mathbf{G}$.

Wniosek 1

Zależność $\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ określa ciąg $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ zbieżny do rozwiązania układu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dla dowolnego przybliżenia początkowego $\mathbf{x}^{(0)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\rho(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) < 1,$$

Definicja 1

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy diagonalnie dominującą jeśli zachodzą nierówności

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n).$$



Metoda Jacobiego

Przedstawiamy macierz układu w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

gdzie $\mathbf{D} = \text{diag}(a_{ij})$, a $\mathbf{L} = (a_{ij})_{i>j}$ i $\mathbf{U} = (a_{ij})_{i<j}$ są macierzami dolną i górną trójkątną o zerowych elementach diagonalnych.

Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zapisujemy w postaci

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{x} &= -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k)} &= -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

Zakładając, że macierz $\mathbf{D}$ jest nieosobliwa otrzymujemy postać $\mathbf{G} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$, $\mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$. W tym przypadku $\mathbf{Q} = \mathbf{D}$.



Metoda Jacobiego

Twierdzenie 3

Jeżeli macierz **A** jest diagonalnie dominująca, to ciąg przybliżeń generowanych przez metodę Jacobiego jest zbieżny do rozwiązania układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla dowolnego przybliżenia początkowego.



Metoda Gaussa-Seidla

Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ zapisujemy w postaci
$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Stąd

$$\begin{aligned}(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} &= -\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \quad (k \geq 1)\end{aligned}$$

Zakładając, że macierz $\mathbf{D}$ jest nieosobliwa otrzymujemy postać
 $\mathbf{G} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$, $\mathbf{c} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$. W tym przypadku
 $\mathbf{Q} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$.



Metoda Gaussa-Seidla

Wyznaczamy współrzędne wektora $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ na podstawie $\mathbf{x}^{(k-1)}$

$$a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ij}x_j^{(k)} + a_{i,j+1}x_{i+1}^{(k-1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k-1)} = b_i$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - b_i \right) / a_{ii} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Twierdzenie 4

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalnie dominująca, to ciąg przybliżeń generowanych przez metodę Gaussa-Seidla jest zbieżny do rozwiązania układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla dowolnego przybliżenia początkowego.



Dowód Twierdzenia 3

Z twierdzenia 1 wynika, że wystarczy udowodnić, że

$$\|I - Q^{-1}A\|_{\infty} < 1.$$

Macierz Q jest macierzą diagonalną złożoną z elementów diagonalnych macierzy A , więc macierz $Q^{-1}A$ ma elementy postaci a_{ij}/a_{ii} . Elementy diagonalne są równe 1. Zatem

$$\|I - Q^{-1}A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}/a_{ii}|$$

Korzystając z faktu, że macierz A jest diagonalnie dominująca wnioskujemy, że

$$\|I - Q^{-1}A\|_{\infty} < 1.$$



Dowód Twierdzenia 4

Z wniosku 1 wynika, że wystarczy udowodnić, że

$$\rho(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) < 1.$$

Niech λ będzie dowolną wartością własną macierzy $\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ i niech $\mathbf{x}$ będzie odpowiadającym jej wektorem własnym. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. Zatem

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ równoważnie } \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Q}\mathbf{x}$$

Macierz $\mathbf{Q}$ jest macierzą dolno trójkątną, więc

$$-\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j = \lambda \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j \quad (1 \leq i \leq n)$$



Dowód Twierdzenia 4 cd...

Stąd

$$\lambda a_{ii} x_i = -\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

Wybieramy indeks i taki, że $|x_i| = 1 \geq |x_j|$ dla wszystkich j ($\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$). Wtedy

$$|\lambda| |a_{ii}| \leq |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

Wyznaczając $|\lambda|$ i korzystając z faktu macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalnie dominująca otrzymujemy

$$|\lambda| \leq \left\{ \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right\} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right\}^{-1} < 1$$

